CANTOR, NGƯỜI CHẾ NGỰ VÔ CỰC

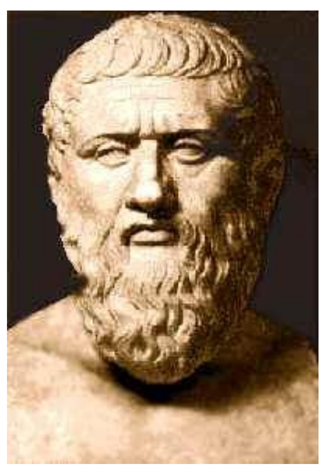
Lê Quang Ánh, Ph.D.

Tóm tắt: Trong bài này chúng tôi sẽ trình bày một số nghịch lý về vô cực và những đóng góp của Cantor trong việc giải thích, chứng minh và mở rộng hiểu biết về vô cực, cùng những gian khổ ông phải vượt qua để đạt đến chân lý.

Trước Cantor, vấn đề vô cực chưa được hiểu một cách đầy đủ và có hệ thống. Nó là nguồn gốc của nhiều nghịch lý và sự nhầm lẫn (confusion). Các nhà Thần học thường dùng ý niệm vô cực (vô tận) trong những phép ẩn dụ (metaphor). Cantor là người đầu tiên đã đưa ra được giải thích hợp lý, chính xác và có hệ thống về khái niệm này. Trong phần đầu của bài này chúng tôi sẽ trình bày một số nghịch lý về vô cực nổi tiếng, sau đó sẽ trình bày những kiến thức đôt phá của Cantor về vô cực cùng là những khó khăn ông phải vượt qua để đạt được chân lý. Một số chi tiết quá chuyên môn sẽ được giải thích thêm trong phần phụ chú.

1. Vài nghịch lý về vô cực.

1. Nghịch lý Zeno.



Zeno nhà Triết học, nhà Toán học Hy Lạp, sống khoảng 490 – 430 trước TL.

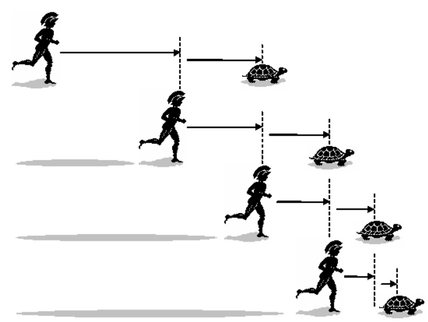
Zeno là một nhà Triết học Hy lạp cổ đại, sống trong khoảng 490 – 430 trước Tây lịch, tức là trước Socrates (470 – 399 trước TL). Aristotle (384 – 322 trước TL) gọi Zeno là ông tổ của phương pháp biện chứng. Zeno nổi tiếng với nghịch lý về chuyển đông, phát biểu dưới nhiều cách khác nhau.

- Nghịch lý thường thấy dưới dạng sau đây gọi là *nghịch lý Achilles*[1] *và con rùa:*

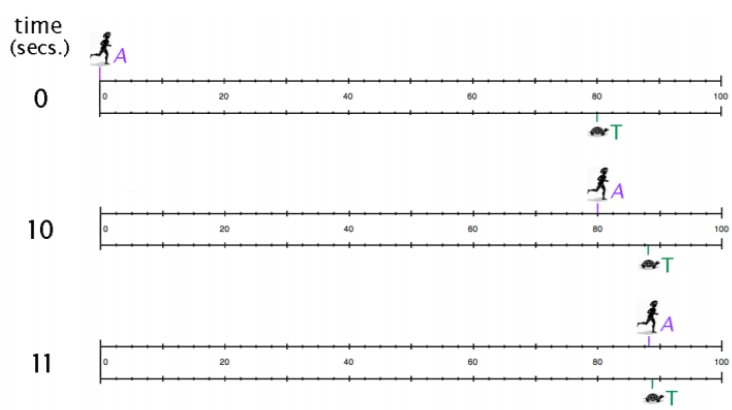
  Achilles và con rùa cùng nhau chạy đua. Ai cũng biết Achilles thì chạy quá nhanh còn con rùa thì bò quá chậm. Vì thế Achilles cho rùa khởi hành trước. Nhưng Achilles có bắt bắt kịp con rùa không?

Zeno nói KHÔNG, chàng dũng sĩ Achilles không thể nào thắng cuộc đua.

Đây là lý luận của Zeno. Giả sử khi Achilles bắt đầu chạy thì con rùa đã cách Achilles một khoảng *d* vì con rùa chạy trước. Muốn đuổi kịp con rùa Achilles phải chạy hết khoảng cách ấy. Trong thời gian ấy con rùa đã di chuyển được một khoảng *d'* nào đó rồi. Muốn bắt kịp con rùa Achilles lại phải chạy hết khoảng cách *d'*, khi ấy con rùa đã đến một vị trí khác rồi. Và cứ thế tiếp tục mãi mãi....Bao giờ cũng có một khoảng cách nào đó giữa Achilles và con rùa, và như vậy Achilles không bắt kịp con rùa.



- Giải thích thế nào đây?



Chúng ta lặp lại lý luận trên bằng cách lấy những con số cụ thể; thí dụ như quảng đường chạy đua là 100m, vận tốc con rùa (T) là 0.8 m/sec, còn Achilles (A) chạy

[1] Achilles mà một trong những anh hùng trong chuyện Thần thoại Hy Lạp.

nhanh gấp mười lần con rùa, tức là vận tốc của Achilles là 8m/sec. Giả sử con rùa chạy được 80m thì Achilles mới bắt đầu chạy. Để chạy hết 80m này Achilles mất 10 giây. Trong thời gian ấy con rùa bò thêm được 8m nữa. Achilles phải mất 1 giây cho khoảng cách này. Trong khoảng thời gian 1 giây ấy con rùa bò thên được 0.8m. Khoảng cách này Achilles phải mất 0.1 giây để chạy hết. Và cứ thế tiếp tục. Mỗi khi Achilles đến vị trí trước đó của con rùa, thì con rùa đã qua vị trí khác rồi. Nói cách khác Achilles không bắt kịp con rùa.
Cái gì sai ở đây? Thời gian – tính bằng giây - Achilles chạy đuổi theo con rùa là

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots$$

Đây là một chuỗi vô tận các con số dương hữu hạn, nghĩa là có vô số các con số dương hữu hạn được cộng lại với nhau. Người ta cho rằng tổng số vô cùng ấy phải là vô cực, cho nên Achilles không đuổi kịp con rùa. Nay ta biết rằng đây là tổng các số hạng của một cấp số nhân vô hạn với công bội $0 < q = \frac{1}{10} < 1$, nên kết quả là một số hữu hạn, tính như sau:

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11 + \frac{1}{9} \text{ giây.}$$

Vậy Achilles cần $11 + \frac{1}{9}$ giây để bắt kịp con rùa (với khoảng cách gần bằng 90m kể từ chỗ Achilles khởi hành).
Cái sai trong lý luận của Zeno là người ta đã vô tình công nhận rằng tổng số của vô số các số dương hữu hạn sẽ không thể nào hữu hạn được. Rõ ràng tình huống này là không đúng với kiến thức về chuỗi số vô hạn hội tụ ngày nay.

2. ***Nghịch lý Galileo***.

**Galileo Galilei
(1564-1642)**

Galileo Galilei là một nhà Thiên văn học, một nhà Vật lý học và cũng là một nhà Toán học người Ý. Ông nổi tiếng về việc bảo vệ lập luận *hệ đồng tâm của Copernic* (tức là quả đất và các hành tinh khác quay quanh mặt trời) vì thế ông bị Tòa án Dị giáo La Mã kết tội vào năm 1633: ông bị giam lỏng suốt đời và buộc phải rút lại những kết luận của mình[2]. Về lãnh vực Toán học ông có một nghịch lý thú vị sau đây.

Chú ý đến tập hợp các số nguyên tự nhiên. Thỉnh thoảng ta bắt gặp một số nguyên *b* là bình phương của một số nguyên *a* nào đó, ta nói *b* là một số chính phương. Thí dụ 1, 4, 9,… là những số chính phương. Thông thường ta cho rằng *số các số chính phương thì ít hơn các số nguyên,* xem cách sắp xếp dưới đây thì rõ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1			4					9					...

Nhưng Galileo nói KHÔNG phải vậy. Ông lập luận bằng cách sắp xếp lại như sau:

1	2	3	4	5	6	7	...
1	4	9	16	25	36	49	...

Qua đó ta thấy ở hàng trên có bao nhiêu số thì hàng dưới cũng có bấy nhiêu số. Nói cách khác, *số các số chính phương cũng nhiều bằng số các số nguyên tự nhiên, tức là một phần cũng nhiều bằng toàn phần!*[3]

3. Nghịch lý Hilbert (hay là chuyện về khách sạn Hilbert).

David Hilbert (1862 - 1943).

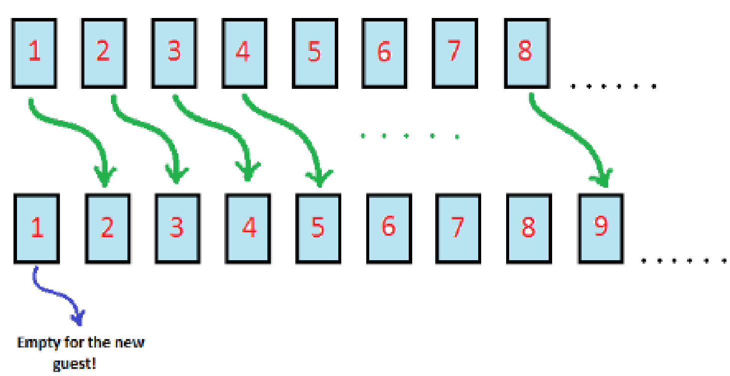
[2] Người ta kể rằng bước ra khỏi tòa, vừa đi Galileo vừa làu bàu: *« E pur si muove! »* (*Nhưng nó vẫn cứ quay!*) Trước Galileo đã có Bruno bị lên dàn hỏa vì chuyện này rồi.

[3] *Toàn phần bao giờ cũng lớn hơn một phần* (*Le tout est toujours plus grand que la partie.* Sách Elements của Euclid – Qui định số 5). Vậy Galileo đã nói ngược với Euclid rồi!

David Hilbert là một nhà Toán học người Đức. Ông được xem là một trong hai nhà Toán học hàng đầu thế giới trong thời gian đầu thế kỷ 20[4]. Ông có một chuyện kể vui mà những người cùng thời đặt tên là chuyện về *khách sạn Hilbert.* Có thể ông muốn góp phần "ủng hộ" cho Cantor – người bị một số nhà Toán học cùng thời hiểu lầm hoặc không muốn hiểu (sẽ nói trong phần sau). Một lần nữa đặc điểm của tập hợp có vô số phần tử là lý do của nghịch lý sau đây.

George Gamov trong cuốn sách *One,Two,Three,..., Infinity* kể lại chuyện của Hilbert như sau:

- Hãy tưởng tượng có một khách sạn có vô số phòng. Một hôm có một ông khách đến mướn phòng. Người quản lý nói: "*Rất tiếc, khách sạn chúng tôi đã hết phòng*." Người khách nói: "*Khách sạn có vô số phòng mà! Hãy để tôi sắp xếp.*" Người quản lý đồng ý. Người khách chỉ cho quản lý làm như sau: *Khách ở phòng số 1 được di chuyển qua phòng số 2, khách ở phòng số 2 được di chuyển qua phòng số 3, khách ở phòng số 3 được di chuyển qua phòng số 4,...,cứ thế tiếp tục. Và phòng số 1 trống sẽ dành cho người khách mới đến. Có phải mọi người đều sẽ có phòng cả không*? (Xem hình a.)

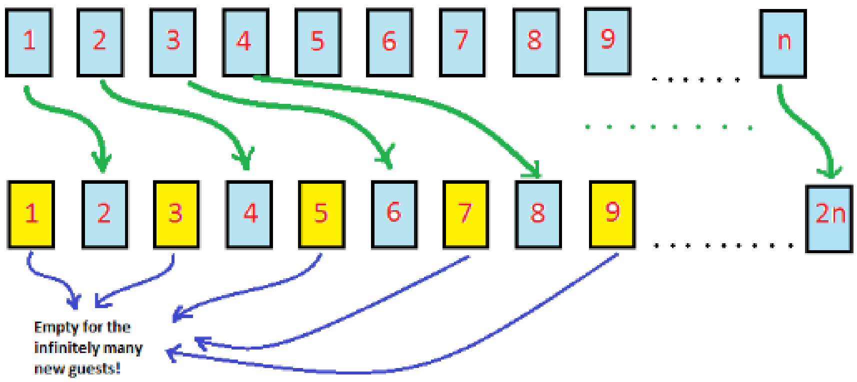


Hình a.

- Một hôm khác người khách thông thái lại dẫn đến khách sạn "vô cực" ấy một số khách đông vô cùng (vô cực), và họ muốn mướn phòng. Quản lý nói: "*Rất tiếc, chúng tôi không còn một phòng nào trống cả*." Người khách thông thái nói: "*Hãy để tôi giúp*." Và đây là cách ông ấy chỉ cho quản lý làm:

[4] Nhà Toán học thứ hai là Henri Poincaré (1854 - 1912). Độc giả có thể xem cuốn *Từ Poincaré đến Perelman (*Dịch cuốn *Poincaré's Prize)* để biết thêm cuộc đời và sự nghiệp của nhà Toán học được mệnh danh là *The last universalist (*Tạm dịch: *Nhà thông thái cuối cùng)*, do tác giả bài viết này dịch.

Khách ở phòng số 1 được di chuyển sang phòng số 2, khách ở phòng số 2 được di chuyển sang phòng số 4, khách ở phòng số 3 được di chuyển sang phòng số 6,…, cứ thế tiếp tục. Như vậy tất cả những phòng mang số lẻ đều trống. Các khách mới đến sẽ được phân phối vào các phòng này. Có phải như vậy mọi người đều sẽ có chỗ cả không? (Xem hình b.)

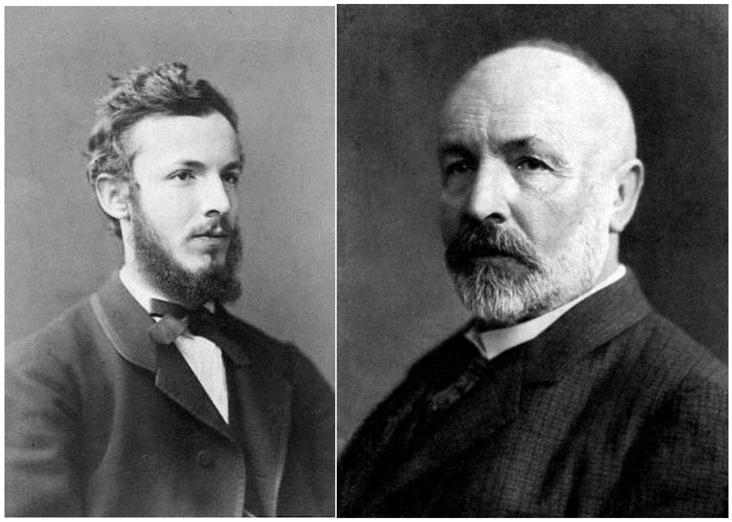


Hình b.

2. Georg Cantor, người chế ngự vô cực.

1. Vài nét về Cantor.

Xuyên qua Lịch sử Toán học, ta thấy có những con người làm thay đổi cách suy nghĩ, làm thay đổi bộ mặt của Toán học bằng ý tưởng, bằng lý thuyết của họ. Euclid khoảng 300 năm trước Tây lịch với bộ sách Elements là một thí dụ. Hơn 1800 năm sau, khái niệm vô cùng nhỏ của Leibniz và Newton đã tạo ra phép tính *Vi-Tích-phân* (*Calculus*) làm phát triển không những Toán học mà cả các Khoa học có liên quan với một tốc độ đáng kể. Tiếp theo là một số đông các nhà Toán học tên tuổi khác với những đóng góp không nhỏ như Weierstrass, Cauchy, Dedekind,…nhưng hơn nổi trội cả trong giai đoạn này là Cantor với *lý thuyết tập hợp vô hạn* của mình. *"Đó là một trong những đóng góp đột phá cho Toán học trong suốt gần 2500 năm Lịch sử Toán học."* (David Burton. *The History of Mathematics: An introduction*.)



Georg Cantor (1845 - 1918), hình ở tuổi 25 tuổi và hình trước khi qua đời vài năm.

Tên đầy đủ của ông là Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor. Ông sinh ngày 3 tháng 3 năm 1845 tại Saint Petersburg, Nga. Nhiều thành viên trong đại gia đình ông là nhạc sĩ, nghệ sĩ, cho nên từ rất sớm ông đã được sống trong một môi trường thuận lợi cho thiên tài phát triển.
Năm 1862, Cantor vào Đại học Zurich, Đức. Cha của ông muốn con trai của mình thành kỹ sư, một nghề có tương lai rực rỡ thời ấy. Nhưng sau mùa đầu, Cantor bắt đầu hướng hẵn về Toán học. Năm sau ông chuyển về Đại học Berlin, ở đó ông may mắn được học với Weierstrass, Kummer, và cũng không may trong số giáo sư của ông có Kronecker (tại sao, sẽ nói thêm trong phần sau). Năm 1867 - ở tuổi 22 – Cantor nhận bằng Tiến sĩ với luận án về *Lý Thuyết Số,* rồi được bổ nhiệm về Đại học Halle. Bị hấp dẫn bởi những bài nghiên cứu chặt chẽ và chính xác về Giải tích của Weierstrass, Cantor viết một loạt bài báo về *biểu diễn hàm số bằng các chuổi lượng giác*. Chính những bài báo này vô tình đã hướng Cantor tới những tập hợp các điểm trên đường thẳng số. Ông nhận ra nhanh chóng rằng chủ đề này phức tạp hơn ông tưởng, từ đó ông bắt đầu để hết tâm trí nghiên cứu các tập hợp, nhất là những tập hợp vô hạn.

2. Một số kết quả cơ bản trong lý thuyết của Cantor.

Chúng ta bắt đầu với định nghĩa của chính Cantor: "*Tập hợp được tạo nên bởi vật thể phân biệt mà trực giác hoặc trí tưởng tượng chúng ta có thể hình dung ra*." (Cantor. Bản dịch của Philip E.B. Jourdain, p 85).

Điều cơ bản đầu tiên mà chúng ta quan tâm là kích cỡ (size) của tập hợp và so sánh kích cỡ của hai tập hợp. Đối với tập hợp hữu hạn thì chỉ cần đếm số phần tử của chúng và so sánh các số này. Chẳng hạn tập hợp A = {a,b,c,d} có 4 phần tử còn tập hợp B = {2,4,6,8,10} có 5 phần tử, như vậy A có kích cỡ nhỏ hơn kích cỡ của B.

Cantor dùng ký hiệu $\bar{\bar{A}}$ để chỉ là *lực lượng* của tập hợp A (cardinal number of *A*), tức là số phần tử mà nó chứa. Trong trường hợp này ta có

$$\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}} .$$

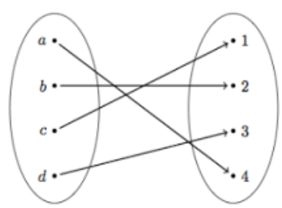
Còn đối với tập hợp vô hạn thì sao? Làm sao đếm hết các phần tử của chúng? Và liệu có đếm được không? Nhưng mà đếm là gì chứ?

Đây là câu chữ của Cantor: "*Chúng ta nói hai tập hợp M và N tương đương với nhau, viết là M ~ N hoặc N ~ M, nếu có thể bằng một cách nào đó, liên kết mỗi phần tử của tập hợp này với một và chỉ một phần tử của tập hợp kia*." (Cantor. Sách đã dẫn, p 86).

Ngôn ngữ Toán ngày nay nói rằng sự liên hệ giữa hai tập hợp trong định nghĩa của Cantor là một *ánh xạ một-một-trên (one-to-one and onto mapping) hoặc là một song ánh (a bijection)* giữa hai tập hợp ấy. Nói một cách khác *hai tập hợp M và N tương đương với nhau khi có một song ánh f từ M đến N.*

$$f: M \to N.$$

Lưu ý rằng khi ấy ánh xạ ngược $f^{-1}: N \to M$ cũng là một song ánh nên định nghĩa của Cantor hoàn toàn hợp lý. Hai tập hợp M và N tương đương với nhau thì cùng cỡ (same size) nghĩa là có cùng lực lượng. Ta viết: $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$.



Đếm là gì? Xem tập hợp M = {a,b,c,d}. Ta thiết lập một song ánh giữa M và tập hợp {1,2,3,4}, *một tập hợp con (a subset)* của tập hợp các số tự nhiên ℕ. Ta nói ta đã đếm tập hợp M và số phần tử của nó là 4. Đó là một tập hợp hữu hạn. Còn với tập hợp vô hạn thì sao? Dưới đây là mở rộng khái niệm đếm cho tất cả các loại tập hợp:

- *Tập hợp S được gọi là <u>đếm được</u> (countable) nếu nó hữu hạn hoặc nếu có một song ánh từ tập hợp các số tự nhiên ℕ đến S.*
- *Tập hợp S được gọi là <u>không đếm được</u> (uncountable) nếu nó không phải là tập hợp đếm được.*

Tập hợp ℕ là tập hợp vô hạn đếm được cơ bản, song ánh nói trong định nghĩa là:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad f(n) = n.$$

Điều thú vị là sau đó Cantor cho thấy rằng tập hợp các số tự nhiên chẵn E^+, một tập hợp con thực sự của $\mathbb{N}$, cũng là vô hạn đếm được nhờ song ánh *f(n) = 2n,* tức là $E^+ \sim \mathbb{N}$. Dễ thấy rằng tập hợp các số tự nhiên lẻ cũng vô hạn đếm được. Điều này một lần nữa giải thích thêm nghịch lý Galileo và cho thấy *ghi chú số 5* trong bộ sách Elements của Euclid[5] không đúng trong trường hợp tập hợp vô hạn.

Năm 1888, Richard Dedekind, một người bạn rất gần với Cantor, dùng nội dung trên để chính thức đưa ra định nghĩa thế nào là một tập hợp vô hạn:

Một tập hợp là vô hạn khi nó tương đương với một tập hợp con thực sự của nó. Trong trường hợp trái lại, tập hợp ấy là hữu hạn.

Bây giờ hãy nghĩ đến tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Nó là loại gì? So với $\mathbb{N}$ nó "lớn" hơn, nói rõ hơn nó chứa $\mathbb{N}$. Nhưng Cantor chứng minh được rằng nó tương đương với $\mathbb{N}$ như sau:

Viết lại $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$, rồi thiết lập ánh xạ:

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ ;\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & nếu\ n\ chẵn. \\ \frac{1-n}{2} & nếu\ n\ lẻ. \end{cases}$$

Ta có thể kiểm chứng rằng đó là một song ánh. Vậy $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$ tương đương với nhau. Do đó theo định nghĩa chúng có cùng lực lượng.

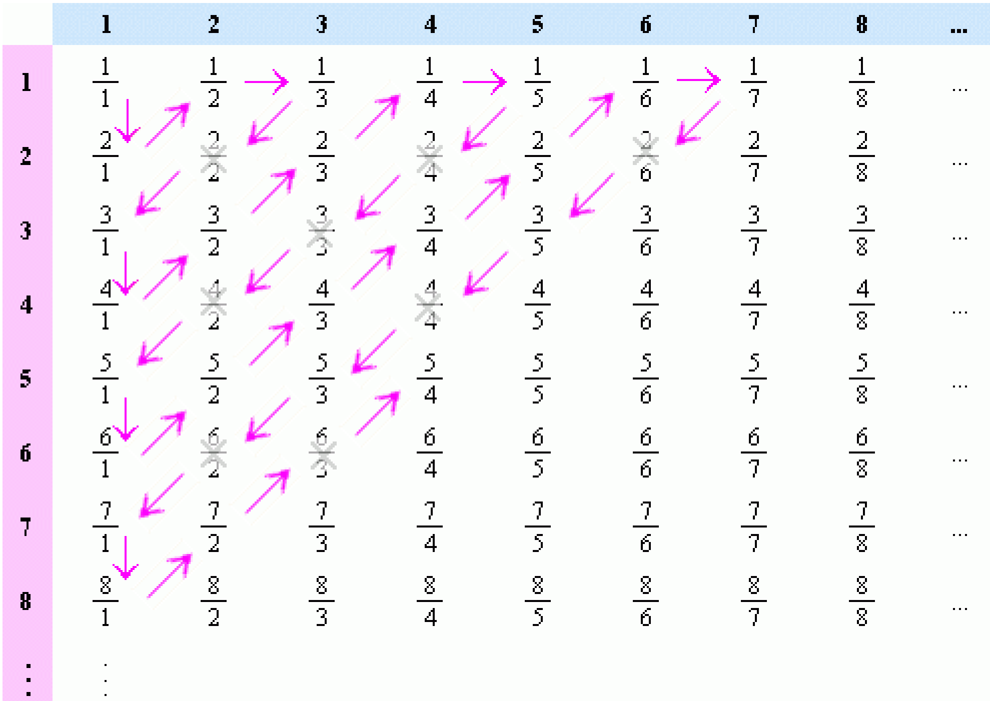
Cuối cùng Cantor chứng minh được *mọi tập hợp con của một tập hợp đếm được đều đếm được.*

Tất cả những điều này đối với chúng ta ngày nay không có gì lạ cả, nhưng chúng gây rất nhiều ngạc nhiên trong giới Toán học thời ấy.

3. Cantor đi xa hơn nữa.

Tất cả các tập hợp được xem xét tới giờ này chỉ là những tập hợp các số nguyên. Thế còn tập hợp các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ thì sao? Đã có lúc nhà Toán học nghiệp dư thiên tài Fermat cũng có nghĩ tới câu hỏi này rồi, nhưng ông ấy chưa đưa ra được câu trả lời rõ ràng. Cantor chứng minh được $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ đếm được bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp tích này (xem hình dưới đây), từ đó suy ra rằng tập hợp $\mathbb{Q}$ là vô hạn đếm được. Như vậy $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

[5] Nhắc lại: *Toàn phần bao giờ cũng lớn hơn một phần* (Euclid).



(Chú ý trong bảng trên các phân số bị gạch bỏ vì đã được liệt kê ít nhất là một lần rồi.)

Đến đây ta thấy Cantor đã có một bước tiến rất lớn với những kỹ thuật chứng minh chưa từng thấy trước đó. Nhưng ông chưa dừng ở đây vì câu hỏi rất quan trọng đối với ông vẫn còn đây: *Tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$ *thì thế nào so với* $\mathbb{N}$? Và Cantor đã trả lời được bằng định lý nổi tiếng sau đây:

Định lý: *Tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$ *là không đếm được.*

Cantor đưa ra hai cách chứng minh, cả hai đều độc đáo chưa từng có. Nhưng trước khi đi vào chi tiết của hai chứng minh này, người viết xin được nhắc ra đây một trong những kết quả mà chứng minh có trong phần phụ chú[6]:

Khoảng (0,1) là tương đương với tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Như vậy muốn chứng minh $\mathbb{R}$ là không đếm được ta chỉ cần chứng minh khoảng *(0,1)* là không đếm được.

- *Chứng minh 1: Phương pháp đường chéo (diagonal argument).*

Giả sử (0,1) đếm được, tức là có một song ánh $f: \mathbb{N} \to (0,1)$. Giả sử bảng dưới đây cho giá trị của *f(n)* với mọi số tự nhiên n.

Ta đọc: $f(0) = 0.a_{0,0}\, a_{0,1}\, a_{0,2}\, a_{0,3}\, a_{0,4}....$; $f(1) = 0.a_{1,0}\, a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,3}\, a_{1,4}....$; ... vân vân.

[6] Xem phụ chú.

$$
\begin{array}{l}
0 \mapsto 0.\ a_{0,0}\ a_{0,1}\ a_{0,2}\ a_{0,3}\ a_{0,4} \cdots \\
1 \mapsto 0.\ a_{1,0}\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4} \cdots \\
2 \mapsto 0.\ a_{2,0}\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4} \cdots \\
3 \mapsto 0.\ a_{3,0}\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4} \cdots \\
4 \mapsto 0.\ a_{4,0}\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4} \cdots \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Ta chứng minh ánh xạ này không thể là *toàn ánh* (*onto = surjective*). Từ các chữ số in màu trong bảng trên, ta lập nên một số thực mới, đó là

$$y = 0.a_{0,0}\ a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}....$$

Số y không thể trùng với bất cứ giá trị nào của $f(n)$ trong bảng trên. Thật vậy, nó khác $f(1)$ từ số thập phân thứ hai; nó khác $f(2)$ từ số thập phân thứ ba; nó khác $f(3)$ từ số thập phân thứ tư,..., vân vân. Vì $y \in (0,1)$ và không có số tự nhiên n nào để $f(n) = y$, nên f không là toàn ánh được.

Tóm lại *f không phải là song ánh,* tức là *(0,1) là không đếm được*. □

- *Chứng minh 2: Phương pháp dãy các khoảng kín bị chặn lồng vào nhau (Sequence of closed bounded nested intervals).*

Giả sử $I = (0,1)$ đếm được, tức là ta có thể liệt kê hết tất cả các phần tử của nó:

$$I = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Đầu tiên ta chọn một khoảng kín I_1 trong I sao cho $x_1 \notin I_1$. Sau đó ta chọn một khoảng kín I_2 trong I_1 sao cho $x_2 \notin I_2$. Cứ như thế tiếp tục ta sẽ được dãy các khoảng kín lồng vào nhau như sau

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq .... \supseteq I_n \supseteq ....$$

sao cho $x_n \notin I_n$ với mọi số tự nhiên n. Theo tính chất của *dãy các khoảng kín bị chặn lồng vào nhau*[7] thì tồn tại một số $\alpha \in I_n$ với mọi số tự nhiên n. Khi ấy $\alpha \neq x_n$ với mọi số tự nhiên n, nghĩa là α không có trong danh sách các phần tử của I đã được liệt kê. Điều này vô lý vì $\alpha \in I_n$ với mọi số tự nhiên n, nên $\alpha \in I$. Tóm lại, *(0,1) là không đếm được*. □

Một kết quả của định lý Cantor là *tập hợp các số vô tỷ không đếm được.*

[7] Xem phụ chú.

Như vậy ngoài những tập hợp cùng cỡ với tập hợp $\mathbb{N}$ (tức là đếm được[8]), còn tồn tại những tập hợp cỡ lớn hơn (những tập hợp không đếm được), hóa ra là *có nhiều loại vô cực!* Để chỉ *lực lượng* của các tập hợp vô hạn Cantor dùng các ký hiệu sau:

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0 \quad \text{và} \quad \overline{\overline{\mathbb{R}}} = c.$$

Theo lý luận trên, Cantor viết: $\aleph_0 < c$. Đến đây Cantor tiếp tục tự hỏi*: Lực lượng của* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *là gì? Có lớn hơn lực lượng của* $\mathbb{R}$ *không*? Theo ngôn ngữ Hình học thì câu hỏi được chuyển thành: *số điểm trên mặt phẳng có nhiều hơn số điểm trên đường thẳng không*? Cantor nghĩ câu trả lời là *đúng* và tìm cách chứng minh. Chẳng những không chứng minh được mà, vào năm 1877, ông đã khám phá ra điều ngược lại, nghĩa là ông đã chứng minh được

$$\overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = c.$$

Trong một bức thư gởi cho Dedekind, Cantor viết: "*Tôi thấy mà tôi không tin được*." (Dunham. *Journey through Genius*, p 273). Nhưng Cantor vẫn chưa tìm thấy tập hợp có lực lượng lớn hơn lực lượng của $\mathbb{R}$*.* Sau nhiều nổ lực của bộ óc thiên tài, Cantor đã tìm thấy điều tổng quát hơn câu hỏi làm bận tâm ông rất nhiều ấy. Năm 1891, trong bài báo *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre (On an Elementary Question of the Theory of Multiplicity)* Cantor đã phát biểu và chứng minh định lý sau đây – ngày nay định lý này mang tên ông:

Định lý Cantor: *Với bất kỳ tập hợp A***,** *ta luôn luôn có***:**

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}.$$

Trong định lý trên, *P(A)* là tập hợp tất cả các tập hợp con của *A*. (Chứng minh để trong phần phụ chú).

Áp dụng định lý này ta có $\overline{\overline{\mathbb{R}}} < \overline{\overline{P(\mathbb{R})}}$, nghĩa là tập hợp $P(\mathbb{R})$ có lực lượng lơn hơn lực lượng của tập hợp $\mathbb{R}$. Cứ thế tiếp tục, ta có chuỗi thứ tự sau đây:

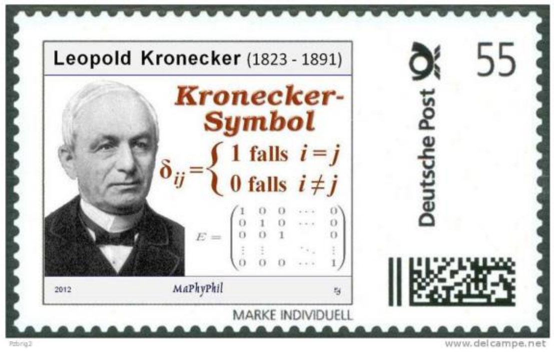
$$\aleph_0 < c < \overline{\overline{P(\mathbb{R})}} < \overline{\overline{P(P(\mathbb{R}))}} < \ldots.$$

Như vậy là có vô số loại vô cực khác nhau được sắp xếp thứ tự. Đối với thời ấy thì đây là một cái gì không tưởng tượng được, ngay cả với chúng ta ngày nay điều này cũng thật đáng kinh ngạc. Vẫn theo Dunham trong sách đã dẫn: "*Điều này có thể là một chân lý lớn nhất sau thời kỳ Hy Lạp cổ đại đến nay.*" Còn một câu hỏi cuối cùng mà Cantor vẫn chưa nghĩ ra, đó là: *Ở giữa hai lực lượng vô cực* $\aleph_0$ *và c, có còn vô cực nào không*? Ngày nay người ta phải chấp nhận là *không có,* và gọi đây là *giả thiết của sự liên tục (the continuum hypothesis).*

[8] Ta bỏ chữ *vô hạn* vì từ đây ta chỉ chú ý đến tập hợp vô hạn.

4. Phản ứng của những người đương thời và kết thúc bi thảm của Cantor.

Tất cả những việc làm của Cantor làm bùng lên nhiều phản ứng khác nhau trong cộng đồng Toán học thời ấy. Có những phản ứng ủng hộ, cổ vũ, có những phản ứng có tính cách tấn công của kẻ thù. Vết thương đau đớn nhất lại do chính người thầy cũ của Cantor gây nên: nhà Toán học Leopold Kronecker (1823 - 1891).



Con tem có hình của nhà Toán học Kronecker và những dấu ấn của ông trong Toán học.

Kronecker là một nhà Toán học lớn người Đức vô cùng bảo thủ. Ông là tác giả câu nói nổi tiếng "*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*." (*Thượng Đế làm ra số nguyên, tất cả cái còn lại là do con người*.) Vì vậy những gì không được xây dựng trên cơ sở các số nguyên đều được ông cho là lố bịch, không đáng để mắt tới. Do đó ông đặc biệt không ưa ngành Giải tích của Wierstrass nổi tiếng thời ấy. Kronecker đã từng làm cho nhà Toán học vĩ đại Weierstrass phải muốn khóc với ý kiến: "*Những kết luận sai trái ấy mà được gọi là Giải tích học đó sao?*" (David Burton. *The History of Mathematics: An introduction*, p 631). Kronecker không thể nào chịu nổi cái mà ông gọi là "*thứ*

Karl Weierstrass (1815 - 1897), nhà Toán học hàng đầu của Đức thế kỷ 19, người được xem là đã tạo ra ngành Giải tích hiện đại.

ngôn ngữ $\delta - \varepsilon$ của Cauchy." Hãy tưởng tượng xem cảm tưởng của ông thế nào về những ý tưởng về vô cực của Cantor. Trong một bài báo Cantor có lần nói đại ý rằng *nếu từ chối khái niệm vô cực thì tức là từ chối trực tiếp sự tồn tại của các số vô tỉ* (E. Maor. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinity*.) Nhưng đó đúng là điều mà Kronecker đã làm. Hình như ông ta chỉ muốn Toán học từ thời Pythagoras cho đến thế kỷ 19 thôi. Kronecker đặc biệt vô cùng ghét *Lý Thuyết Tập hợp* của Cantor và do đó ghét lây sang cả con người Cantor nữa. Điều này ảnh hưởng rất nhiều đến đời sống của thiên tài Toán học Cantor. Chúng ta nhớ lại rằng sau vài năm ra trường Cantor được bổ nhiệm về Đại học Halle, một loại trường Đai học chưa có uy tín, một loại trường Đại học hạng hai, và lúc nào ông cũng muốn được có nhiệm sở tại Đại học Berlin danh tiếng. Nhưng Kronecker đang là giáo sư kỳ cựu và có thế lực tại đây, cho nên ước muốn của Cantor là điều không thể thực hiện được. Thậm chí Kronecker còn dùng ảnh hưởng của mình để ngăn chặn một số bài báo của Cantor ở tòa soạn các tờ báo Toán học có tiếng, cho nên bài báo của Cantor chỉ có thể xuất hiện ở những tờ báo loại thường. Mặc dù Cantor được một số nhà Toán học tên tuổi ủng hộ, cổ vũ, như Hilbert, Weierstrass, Dedekind,…nhưng vị thế của Kronecker khi ấy rất mạnh, mạnh một cách áp đảo.

Tất cả những tấn công ấy nhắm vào chính cá nhân của Cantor làm cho cuộc sống Cantor luôn luôn bị căng thẳng. Thêm vào đó trong thời gian dài Cantor không thể chứng minh được *giả thiết về sự liên tục,* Cantor gần như kiệt lực. Vào năm 1884, Cantor đã bắt đầu có dấu hiệu suy nhược thần kinh, nên sau đó người ta đưa vào bệnh viện tâm trí Halle. Sau một vài tháng, ông bình phục và trở lại công việc, trở lại với nghiên cứu. Năm 1888, trong một bài báo, ông viết: "*Tôi tin rằng lý thuyết của tôi chắc chắn chư đá tảng. Mũi tên nào bắn vào nó, mũi tên ấy sẽ nhanh chóng quay về người bắn*." (Dunham. Sách đã dẫn, p 283). Năm 1899, điều bi thảm đã đến với ông. Người con trai út mà ông thương yêu nhất – Rudolph – qua đời đột ngột, làm cho ông đột quỵ. Từ đó, ông liên tiếp ra vào bệnh viện tâm trí vào các năm 1902, 1904, 1907, 1911 với các chu kỳ: bệnh, khỏi bệnh, lại bệnh,…Cuối cùng ông phải rời khỏi nhiệm sở năm 1913 trong tình trạng gần như mất trí. Trong những năm này, lý thuyết của Cantor đã lan tỏa và được chấp nhận khắp mọi nơi, nhưng bệnh tâm trí của Cantor thì càng ngày càng nặng. Ông mất tại bệnh viện ngày 6 tháng 1 năm 1918.

Đó là kết thúc thảm kịch của một trong những thiên tài của thế giới Toán học. Ý tưởng độc đáo của ông tiếp tục là nguồn cảm hứng của nhiều thế hệ Toán học sau này. Nhà Toán học vĩ đại Hilbert từ đầu đã không cho phép lý thuyết của Cantor chết. Hilbert nói về lý thuyết của Cantor: "*Đó là một sản phẩm trí tuệ tinh tế nhất của một thiên tài Toán học, một trong thành tựu cao cấp nhất mà trí tuệ con người có thể đạt được.*" (Burton. Sách đã dẫn, p 629). Để bảo vệ lý thuyết này, Hilbert viết: "*Không ai có thể ngăn cấm chúng ta bước vào thế giới kỳ diệu mà Cantor đã tạo ra*."(Dunham. Sách đã dẫn, p 281). •

****

Tài liệu tham khảo.

1. Royden. H. L. *Real Analysis.* 3rd edition. Prentice Hall. New Jersey. 1988.
2. Burton, David M. *The History of Mathematics: An Introduction.* 5th edition. McGraw Hill. New York. 2003.
3. Cantor, Georg. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Trans. Philip E.B. Jourdain. La Salle: The Open Court Publishing Company. 1952.
4. Dunham, William. *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. Penguin Books. New York. 1991.
5. Maor, Eli. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite.* Princeton UP. 1991.

Phụ chú

Phụ chú 1. *Khoảng (0,1) tương đương với đường thẳng thực $\mathbb{R}$.*

<u>*Chứng minh:*</u> Xem hàm số *f*: $\mathbb{R} \to (0,1)$ định bởi $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Đó là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm:

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0; \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số này *liên lục và đồng biến nghiêm cách trên $\mathbb{R}$.*

Ngoài ra ta còn có

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$$

cho nên *f*: $\mathbb{R} \to (0,1)$ là một song ánh. Vậy $\mathbb{R}$ tương đương với (0,1). □

Phụ chú 2.

Định lý: *(Về khoảng lồng)*

Nếu $\{I_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ là một dãy gồm các khoảng kín (đóng) bị chặn lồng vào nhau, nghĩa là

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

<u>*Chứng minh:*</u>

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $I_n = [a_n, b_n]$. Hai dãy số (a_n) và (b_n), do giả thiết $I_n \supseteq I_{n+1}$, phải thỏa điều kiện:

$$(*) \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Như vậy dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ về một số a, còn dãy số (b_n) giảm và bị chặn dưới nên hội tụ về một số b. Do điều kiện (*) nói trên nên ta có:

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n .$$

Từ đó a, b $\in I_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset . \quad \square$$

Phụ chú 3.

Định lý Cantor: *Với bất kỳ tập hợp A, ta luôn luôn có:*

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$$

trong đó P(A) là tập hợp các tập hợp con của A.

Chứng minh:

Coi ánh xạ *f*: *A* → *P(A)* định bởi *f(a) = {a}*. Hiển nhiên *f* là ánh xạ 1-1 (injective), từ đó

$$(*) \qquad \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{P(A)}}.$$

Giả sử đẳng thức xảy ra, nghĩa là ta có $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{P(A)}}$, tức là $A \sim P(A)$. Theo định nghĩa, khi ấy có một song ánh *g: A* → *P(A)*. Coi tập hợp

$$B = \{ a \in A \,/\, a \notin g(a) \}.$$

Hiển nhiên *B* là một tập hợp con của *A* cho nên *B* ∈ *P(A).* Vì *g* là một song ánh nên tồn tại một phần tử *x* ∈ *A* sao cho *g(x) = B*. Có hai trường hợp có thể xảy ra:

1. x ∈ *B*.
   Theo định nghĩa của *B*, *x* ∉ *g(x)*. Nhưng *g(x) = B,* do đó *x* ∉ *B.* Mâu thuẩn.
2. *x* ∉ *B.*
   Theo định nghĩa của *B*, *x* ∈ *g(x)*. Nhưng *g(x) = B,* do đó *x* ∈*B.* Mâu thuẩn.

Cả hai trường hợp đều dẫn tới mâu thuẩn. Vậy giả sử $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{P(A)}}$ là không thể xảy ra được, nghĩa là $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{P(A)}}$. Cùng với (*), bắt buộc chỉ có

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}\,. \quad \square$$

****

California những ngày đầu Xuân 2017.