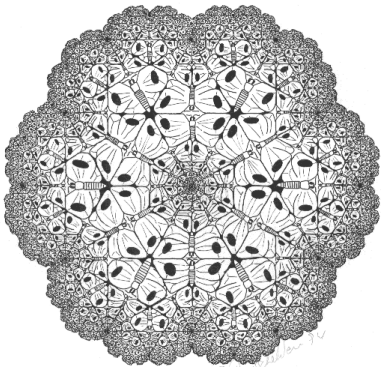
HÌNH HỌC PHÂN DẠNG *là gì?*

<u>Tóm tắt</u>: Trong bài này, chúng tôi muốn trình bày sơ lược với độc giả một ngành hình học mới: Hình học Phân dạng. Chúng tôi giới thiệu vài mẫu hình phân dạng qua hai cách thành lập: cách lặp lại và cách sinh ra từ số phức. Chúng tôi cũng trình bày một cách đơn giản về số chiều không nguyên (non-integer dimension) của hình phân dạng.

Lê Quang Ánh, Ph.D.

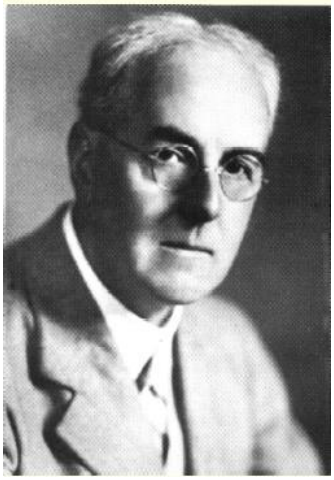
Hình học phân dạng (Fractal Geometry) là một ngành mới của Toán học, mới ra đời độ chừng hơn nửa thế kỷ nay. Lâu nay người ta thường nghĩ Toán học chỉ gồm những con số, những phương trình "khô khan" hoặc là những hình vẽ cứng nhắc có nòng cốt là những hình phẳng hoặc những hình khối của Hình học Euclid. Với Hình học phân dạng người ta có dịp thưởng thức những hình ảnh đẹp tuyệt vời, có khi có thật trong thiên nhiên, mà cũng có khi là sản phẩm của trí tuệ của con người và của máy tính, chẳng hạn như vài hình sau đây:



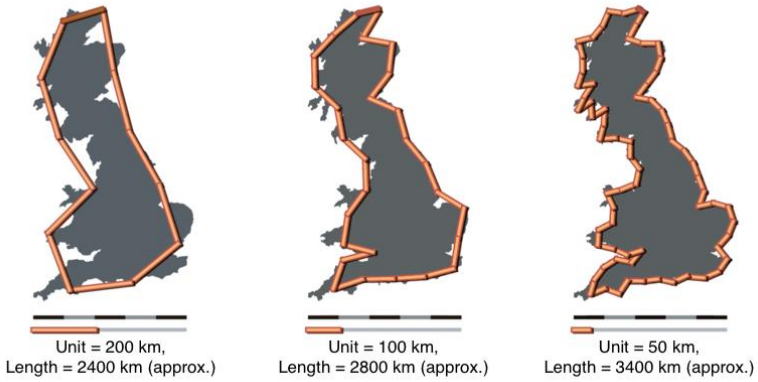
Hình phân dạng tạo bởi Peter Raedschelders (Yale University) trên máy tính.

Hình phân dạng trong thiên nhiên (lá dương xỉ).

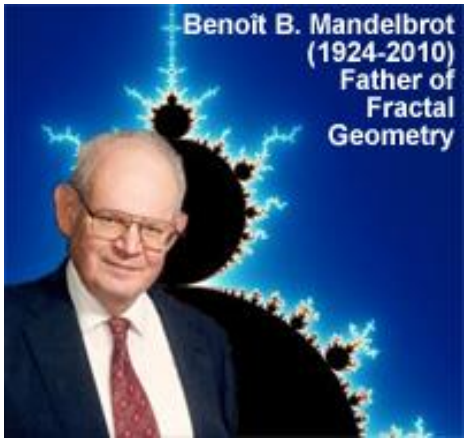
1. Hình học phân dạng là gì? Có xuất xứ như thế nào?



Lewis Fry Richardson (1881 – 1953), nhà Toán học, nhà Khí Tượng học, nhà vận động Hòa bình, người Anh.



Khi nghiên cứu nguyên do có chiến tranh giữa hai nước, Lewis Richardson để ý đến mối liên hệ giữa xác suất có chiến tranh và độ dài biên giới chung của hai nước ấy. Trong khi thu thập dữ liệu, ông nhận ra rằng có sự chênh lệch đáng kể trong các con số đo đạt độ dài biên giới giữa nhiều nước. Thí dụ như biên giới giữa Tây Ban Nha và Bồ Đào Nha được ghi nhận thay đổi từ 987 km đến 1214 km, còn biên giới giữa Hà Lan và Bỉ từ 380 km đến 499 km, tùy theo tài liệu. Ông điều tra thấy rằng độ dài biên giới thay đổi do đơn vị dùng trong việc đo đạt thay đổi. Ông công bố những dữ liệu thống kê và giả thuyết của mình dựa trên các dữ liệu thu thập được. Những dữ liệu và giả thuyết ấy được Benoît Mandelbrot trích dẫn trong bài báo nổi tiếng công bố vào năm 1967 trên tờ Science: "*How Long Is the Coast of Britain?"*(*Bờ biển nước Anh dài bao nhiêu?*). Chính bài báo này là viên đá đầu tiên đặt nền móng cho ngành Hình học phân dạng, và cũng chính Mandelbrot là người tiếp tục những bước kế tiếp trong việc định hình và phát triển ngành học mới này.



Benoît Mandelbrot (1924 - 2010), nhà Toán học Pháp-Mỹ, sinh quán Ba Lan, cha đẻ của Hình học phân dạng.

Benoît Mandelbrot sinh đẻ tại Ba Lan, theo gia đình qua Pháp năm 1936, rồi lớn lên học hành tại đây. Sau khi tốt nghiệp trường Đại học Bách Khoa Paris năm 1947, ông qua Mỹ học tại CIT (California Institute of technology = Viện kỹ thuật California) và lấy bằng Cao học về Hàng không (Aeronautics) năm 1949. Ông trở về Pháp lấy bằng Tiến sĩ Toán tại Đại học Paris năm 1952. Năm 1958, ông lại qua Mỹ và làm việc tại Viện nghiên cứu IBM và ông làm việc tại đây suốt 35 năm. Trong khoảng thời gian nghỉ thường niên, ông được mời làm giáo sư thỉnh giảng tại Đại học Yale. Phạm vi nghiên cứu của ông rất rộng: không những nhiều vấn đề về lý thuyết Toán mà cả những áp dụng của Toán vào Tin học, Kinh tế và Cơ học lưu chất. Khi còn trẻ, ông chịu ảnh hưởng nhiều của người chú ruột, nhà Toán học Szolem Mandelbrojt[1], một trong những nhà Toán học cùng thời và rất gần gủi với nhóm Bourbaki.

Một hình phân dạng là một hình "gai góc lởm chởm (rough)" hoặc một hình có một dạng hình học nào đó, có thể được chia ra thành nhiều mảnh nhỏ, mỗi mảnh nhỏ - dầu ở kích cỡ nào – đều đồng dạng (hoặc gần như đồng dạng) với toàn thể hình.

Đây chính là câu chữ của B. Mandelbrot, được dùng làm định nghĩa cho từ *hình phân dạng*, tiếng Anh là *fractal* xuất phát từ chữ La tinh *fractus* (nghĩa là gãy vụn), gắn liền với tên của Mandelbrot từ năm 1975. Tính chất đồng dạng trong định nghĩa trên được gọi là tính *tự đồng dạng* (*self-similarity*).

Một hình phân dạng thường có những tính chất sau đây:

1. Có cấu trúc rất tinh tế ở bất cứ kích cỡ nào. Mỗi thành phần của hình thì đồng dạng với toàn thể hình (tính chất tự đồng dạng).

[1] Lưu ý chữ *j* trong tên của nhà Toán học này theo kiểu người Ba Lan.

2. Có hình dạng rất bất thường, phức tạp, mà hình học Euclid thông thường không dễ dàng mô tả được.
3. Có thể được tạo dựng bởi phép *truy hồi* (*recursive*) hay phép *lặp lại* (*iteration*) từ một hình đơn giản.
4. Có số chiều *không phải là số nguyên* (*non-integer dimension, fractional dimension*).

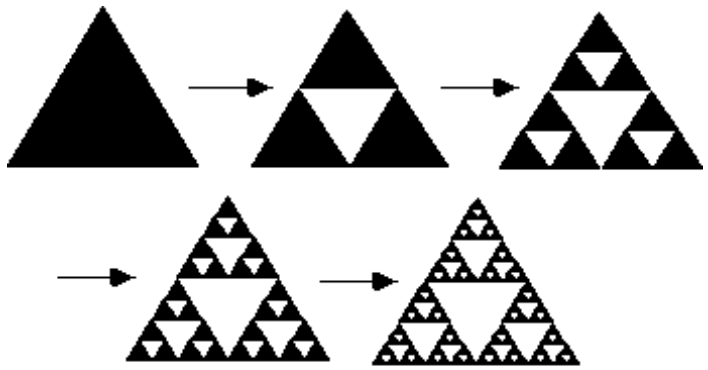
Trong số những tính chất của một hình phân dạng, chúng ta hãy chú ý đến hai tính chất quan trọng nhất, đó là tính *tự đồng dạng* và số chiều *không phải là số nguyên* mà ta sẽ tìm hiểu trong các phần sau.

Có hai cách chính để tạo ra một hình phân dạng: *cách lặp lại* (*truy hồi*) và cách *phát sinh từ số phức Julia-Mandelbrot.* Chúng ta sẽ giới thiệu hai cách này qua một số hình phân dạng quan trọng trong phần dưới đây.

2. Tam giác Sierpinski.

Wacław Sierpiński (1882 – 1969), nhà Toán học người Ba Lan.

Tam giác Sierpinsli được nhà Toán học Ba Lan Waclaw Sierpinski mô tả lần đầu tiên vào năm 1916, đó là một hình phân dạng được thành lập theo lối lặp lại.



1. Khởi đầu bằng một tam giác đều.

2. Chia tam giác ấy thành bốn tam giác đều nhỏ (nhờ trung điểm các cạnh), rồi lấy tam giác ở giữa ra.
3. Lặp lại bước 2 cho các tam giác đều nhỏ còn lại. Cứ thế tiếp tục mãi.

Ta có thể tính chu vi và diện tích các tam giác màu đen để hình thành tam giác Sierpinski trong mỗi giai đoạn, từ đó suy ra được chu vi và diện tích của tam giác Sierpinski. Kết quả chi tiết của bốn giai đoạn đầu được ghi lại trong bản sau đây:

Giai đoạn	Số tam giác	Tổng chu vi	Tổng diện tích
0	1	3	1
1	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{4}$
2	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{16}$
3	27	$\frac{81}{8}$	$\frac{27}{64}$

Ta có thể suy ra tổng chu vi và diện tích trong giai đoạn thứ *n*:

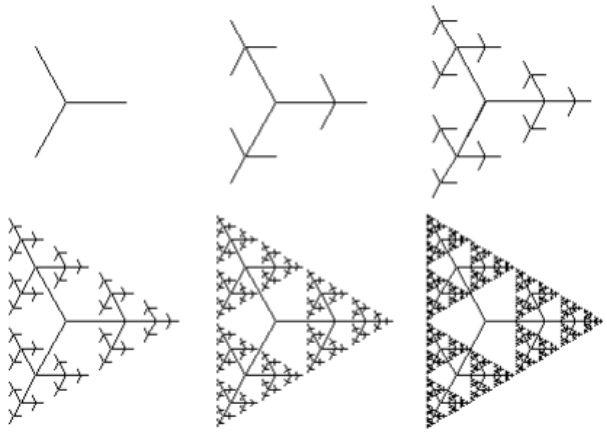
$$P_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ và } S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Cho $n \to \infty$, ta có được chu vi và diện tích tam giác Sierpinski là

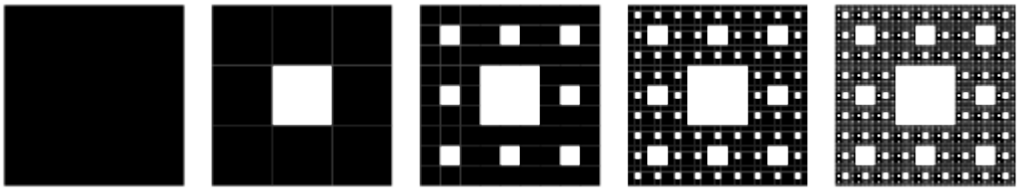
$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \infty \text{ và } S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

Điều có thể gây ngạc nhiên cho một số trong chúng ta là diện tích tam giác Sierpinski bằng 0, trong khi chu vi của nó là vô cực.

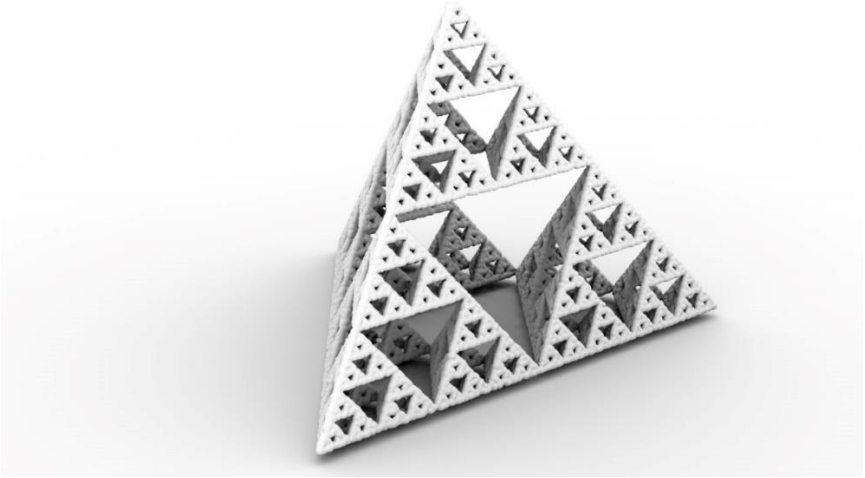
Một vài hình phân dạng tương tự như tam giác Sierpinski:



Các bước hình thành *Tam giác nhánh tam phân Sierpinski* (*Ternary tree Sierpinski triangle*).



Các bước hình thành *Tấm thảm Sierpinski* (*Sierpinski carpet*).



Một giai đoạn trong sự thành lập *Tứ diện đều Sierpinski* (*3D Sierpinski tetrahedron*).

3. Bông tuyết Koch.

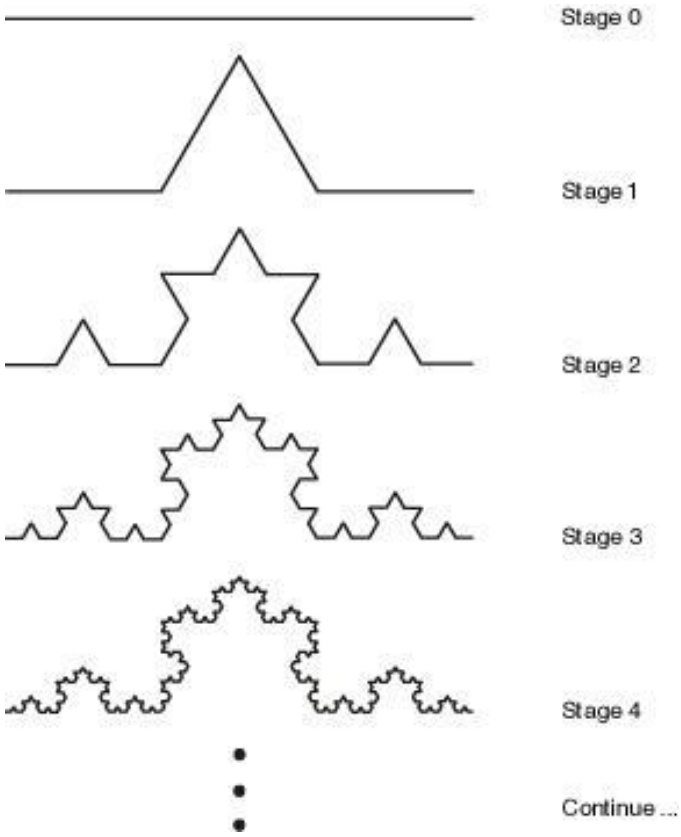
Von Koch (1870 – 1924), nhà Toán học Thụy Điển.

Bông tuyết Koch (*Koch snowflake*) là một hình phân dạng có được bằng phương pháp lập lại - như cách thành lập tam giác Sierpinski - do nhà Toán học Thụy điển Von Koch mô tả vào năm 1904 trong bài báo viết bằng tiếng Pháp nhan đề "*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique*

élémentaire" (*Về một đường cong liên tục không tiếp tuyến, có được bằng một phép vẽ hình học đơn giản*).

Trước hết ta hãy nói về *đường cong Koch.*

- **Đường cong Koch.**



Cách thành lập như sau:

1. Khởi đầu bằng một đoạn thẳng.
2. Chia đoạn thẳng thành ba phần bằng nhau. Thay đoạn giữa bằng hai đoạn bằng nhau (và bằng đoạn thay thế), tạo với nhau một góc bằng 60^0.
3. Lặp lại bước 2 cho bốn đoạn thẳng trong phần trên. Cứ thế tiếp tục mãi.

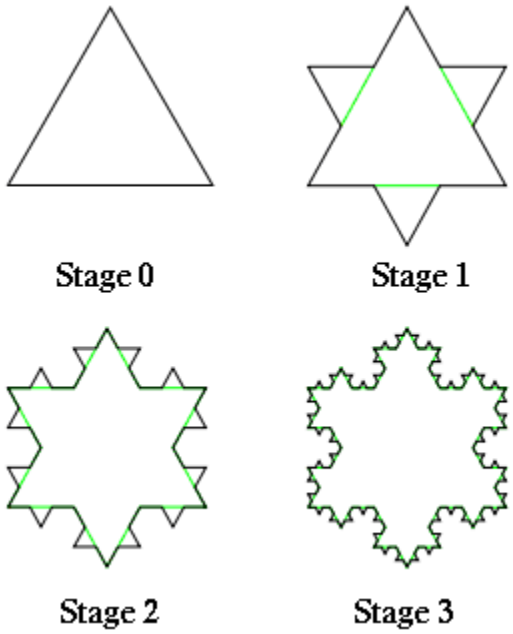
Có thể tính được độ dài đường gấp khúc ở bước thứ *n* là (nếu đoạn thẳng khởi đầu dài bằng 1):

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Từ đó suy ra độ dài đường cong Koch là

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \infty.$$

- **Bông tuyết Koch.**



Ta bắt đầu bằng một tam giác đều. Trên mỗi cạnh ta dựng các đường đường gấp khúc để tạo nên đường cong Koch như đã nói ở phần trên, ta được một hình gọi là *bông tuyết Koch* (*Koch snowflake*).

Vì chiều dài của đường cong Koch trên mỗi canh tam giác bằng vô cực, cho nên chu vi hình bông tuyết Koch bằng vô cực.

Bây giờ ta thử tính diện tích phần bên trong của bông tuyết Koch. Mục tiêu chính là tìm một biểu thức cho diện tích phần giới hạn bởi đường gấp khúc ở giai đoạn tổng quát – giai đoạn thứ *n*.

Trước hết gọi A_0 là diện tích tam giác đều cho sẵn. Ở giai đoạn thứ nhất, diện tích tương ứng là tổng của A_0 với diện tích 3 tam giác đều nhỏ. Dễ thấy rằng diện tích mỗi tam giác đều nhỏ này bằng $\frac{A_0}{9}$. Như vậy diện tích cần tính trong giai đoạn thứ nhất là

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{A_0}{9}.$$

Ở giai đoạn thứ hai, diện tích tương ứng là tổng của A_1 với diện tích 12 tam giác đều nhỏ. Diện tích mỗi tam giác đều nhỏ trong trường hợp này bằng $\frac{1}{9} \cdot \frac{A_0}{9} = \frac{A_0}{9^2}$. Như vậy diện tích cần tính trong giai đoạn thứ hai là

$$A_2 = A_1 + 12 \cdot \frac{A_0}{9^2}.$$

Làm tiếp các giai đoạn sau và sắp xếp lại các kết quả ta được:

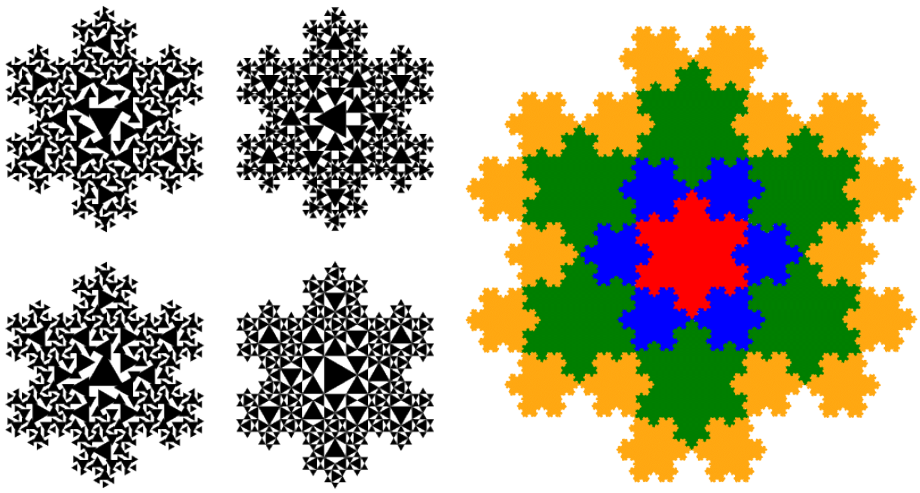
$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + 3A_0 4^0 \left(\frac{1}{9}\right)^1 \\
A_2 &= A_1 + 3A_0 4^1 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\
&= A_0 + 3A_0 4^0 \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 3A_0 4^1 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\
A_3 &= A_2 + 3A_0 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \\
&= A_0 + 3A_0 4^0 \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 3A_0 4^1 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3A_0 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \\
&\vdots \\
A_n &= A_0 + 3A_0 \sum_{i=1}^{n} 4^{i-1} \left(\frac{1}{9}\right)^i \\
&= A_0 + \frac{3}{4} A_0 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^i
\end{aligned}
$$

Do đó diện tích của hình bông tuyết Koch tính bởi

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = A_0 + \frac{3A_0}{4} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{8A_0}{5}.$$

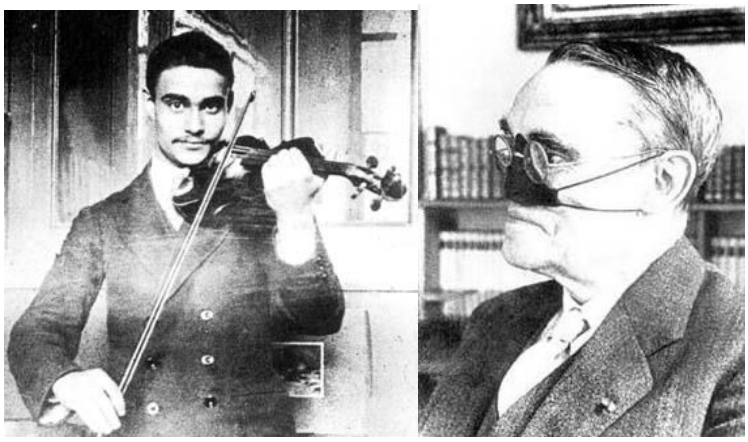
Đây cũng là một thí dụ cho thấy một đường cong kín dài vô tận có thể giới hạn một diện tích hữu hạn.

- **Một vài hình biến tấu từ bông tuyết Koch.**

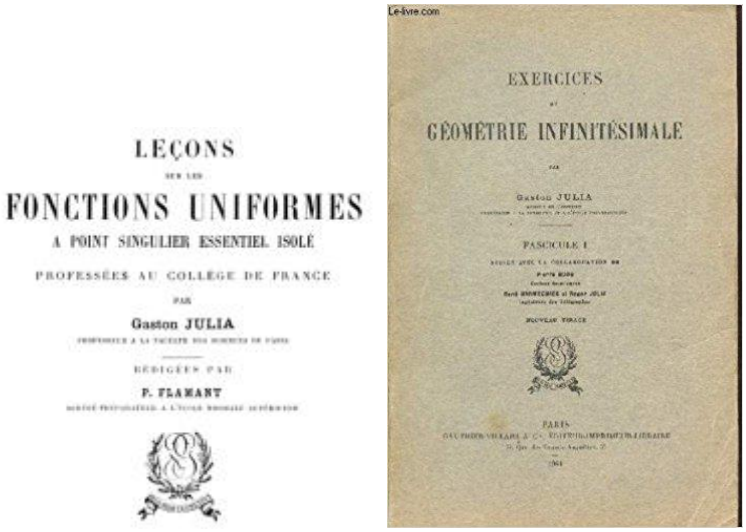


4. Hình phân dạng sinh ra từ số phức.

Có hai nhà Toán học tiên phong trong lãnh vực nghiên cứu này: Gaston Julia và Benoît Mandelbrot. Về nhà Toán học Mandelbrot chúng tôi đã có nói ở phần đầu của bài này, ở đây xin được có vài nét về nhà toán học Gaston Julia.



Gaston Julia (1893 – 1978), hình ở tuổi 20 và hình khi đang là giáo sư ở nhiều trường ĐH Paris.



Một số sách giáo khoa Toán của Gaston Julia (trước và trong thế chiến thứ II).

Gaston Julia sinh ra và lớn lên ở Algérie, một thuộc địa của Pháp ở Bắc Phi. Thuở nhỏ ông rất thích âm nhạc và Toán học. Ông đậu vào trường Cao đẳng Sư Phạm Paris danh tiếng. Năm 21 tuổi, đang học năm cuối, thì thế chiến thứ nhất bùng nổ, chàng tuổi trẻ đã phải "xếp bút nghiên theo việc đao cung", và chẳng may bị thương mất hoàn toàn chiếc mũi. Bao nhiêu lần chữa trị tái tạo không thành công, Julia đành phải mang một miếng da - tự chế - che khoảng trống ấy suốt đời. Trong thời gian 1916 – 1917, khi còn nằm tại bệnh viện, ông đã viết một bài nghiên cứu mang tên "*Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles*

ou complexes, ou à indéterminées conjuguées" gởi đến Hàn Lâm Viện Khoa học Paris để được xin được thẩm định. Chủ tịch hội đồng là nhà Toán học nổi tiếng Emile Picard và một trong những giám khảo là nhà Toán học sáng lập ra lý thuyết độ đo Henri Lebesgue, tất cả đều đồng ý cấp cho Julia bằng Tiến sĩ đặc cách với lời khen ngợi. Năm 25 tuổi, Julia công bố một bài viết dài 199 trang mang tựa đề "*Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles"*, trong đó ông đưa ra ý tưởng về sự lặp lại của hàm phức, ý tưởng này làm nguồn cảm hứng cho Mandelbrot xây dựng nên ngành *hình học phân dạng* sau này. Với bài nghiên cứu ấy, ông được tặng thưởng giải thưởng lớn của Hàn Lâm Viện Khoa học (*Grand Prix de l'Académie des Sciences*) năm 1919. Trong thời gian dạy học, ông viết không dưới 10 cuốn sách giáo khoa, làm hành trang cho rất nhiều thế hệ sinh viên Toán học khắp nơi thế giới[2].

1. Tập hợp Mandelbrot.

Tập hợp Mandelbrot là tập hợp các điểm z_0 trong mặt phẳng phức sao cho phép lặp lại định bởi hệ thức

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0$$

bị chặn.

Thí dụ:

- Với $z_0 = 1$. Ta có:

$$z_1 = z_0^2+z_0 = 1+1 = 2$$
$$z_2 = z_1^2+z_0 = 4+1 = 5$$
$$z_3 = z_2^2+z_0 = 25+1 = 26$$
$$z_4 = z_3^2+z_0 = 25+1 = 677$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

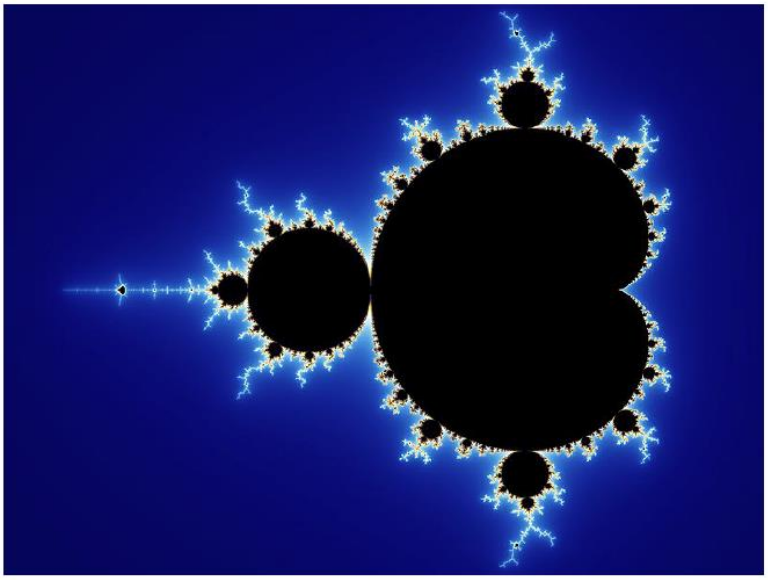
  Dãy số (z_n) không bị chặn. Do đó $z_0 = 1$ <u>không thuộc về</u> tập hợp Mandelbrot.

- Với $z_0 = i$. Ta có:

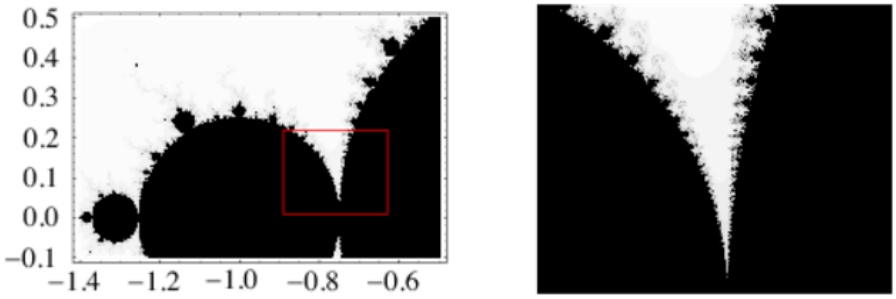
$$z_1 = z_0^2+z_0 = i^2 + i = -1+i$$
$$z_2 = z_1^2+z_0 = (-1+i)^2 + i = - i$$
$$z_3 = z_1^2+z_0 = (-i)^2 + i = -1+i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  Dãy số (z_n) bị chặn. Do đó $z_0 = i$ <u>thuộc về</u> tập hợp Mandelbrot.

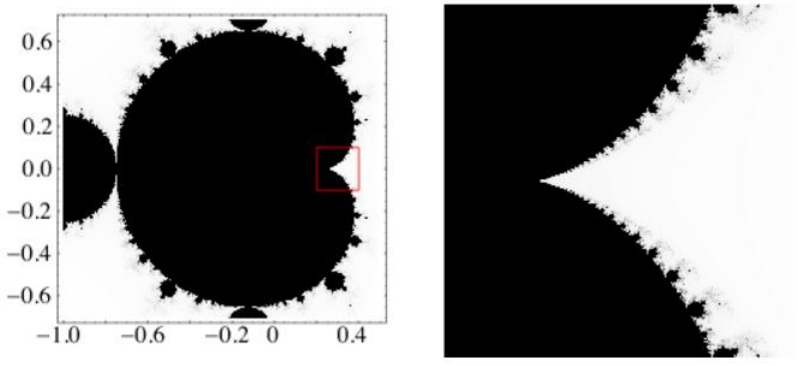
[2] Người viết bài này còn nhớ đã nhiều lần xử dụng sách của Julia ở thư viện trường ĐH Khoa học và ĐH Sư phạm Saigon trong những năm 1963-1967. Tất cả sách của ông đều do nhà Gauthier-Villars xuất bản (L.Q.A).



Tập hợp Mandelbrot.



Hình phóng lớn ở khu vực *thung lũng cá ngựa* (*sea horse valley*) trong tập hợp Mandelbrot.



Hình phóng lớn ở *thung lũng voi* (*Elephant valley*) trong tập hợp Mandelbrot.

Ta chú ý tính tự đồng dạng của hình ở mọi nơi cho dù ở cỡ (size) rất nhỏ.

2. Tập hợp Julia.

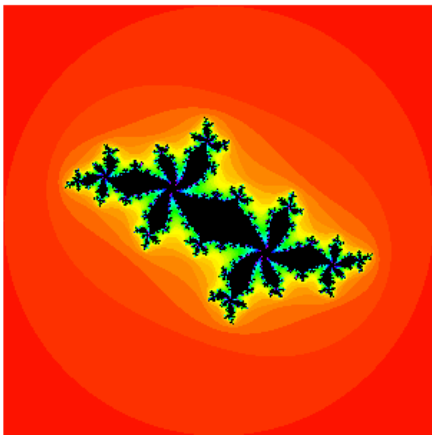
Xem qui luật lặp lại định bởi:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

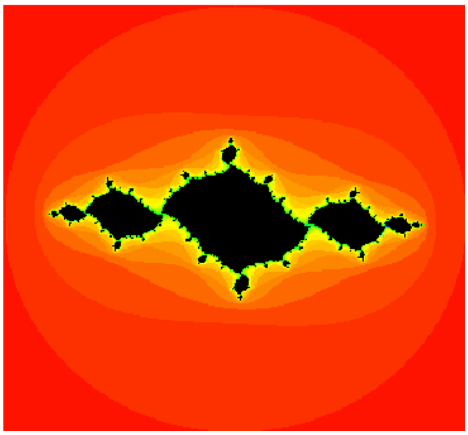
trong đó *c* cố định (có giá trị cho sẵn).

Tập hợp Julia là tập hợp tất cả các điểm z bị chặn trong mặt phẳng phức qua phép lặp lại định bởi phương trình trên. Ta lưu ý ngay sự khác nhau của định nghĩa này và định nghĩa của tập hợp Mandelbrot ở chỗ giá trị của số *c* ở đây cho sẵn.

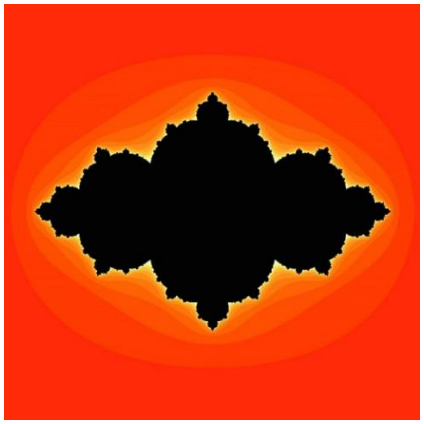
Như vậy với mỗi giá trị của *c* ta có một tập hợp Julia tương ứng, cho nên sẽ có vô số tập hợp Julia khác nhau. Dưới đây là vài tập hợp Julia ứng với những giá trị khác nhau của *c* (Nguồn: Internet).



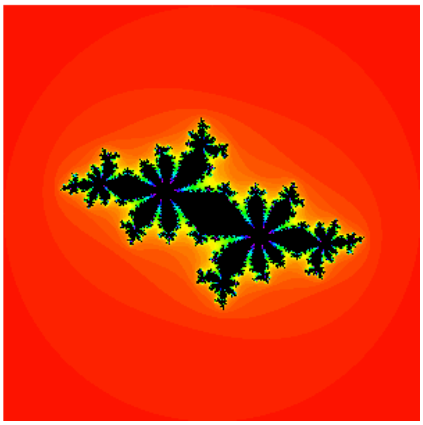
c= -0.52 + 0.57i.



c = -1.037 + 0.17i .

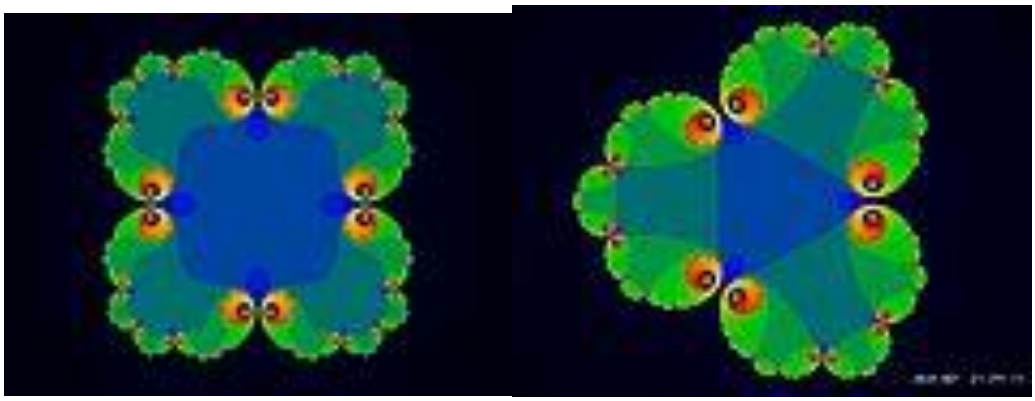


c = 1 – φ (trong đó φ là số vàng).



c = -0.624 + 0.435i.

Nếu thay đổi qui luật lặp lại, ta có thể có một số hình phân dạng khác. Xem các thí dụ sau với hàm qui định đi kèm:



$z_{n+1} = z_n^4 + 0.484.$ $z_{n+1} = z_n^3 + 0.4$

5. Số chiều của một hình phân dạng.

Trước khi nói tới số chiều của một hình phân dạng chúng ta hãy trở về khái niệm thông thường (mà chúng ta rất quen thuộc) trong hình học Euclid.
Trong hình học Euclid:

- Số chiều của một điểm là *0*.
- Số chiều của đường thẳng là *1*.
- Số chiều của mặt phẳng là *2*.
- Số chiều của không gian (ta đang sống) là *3*.

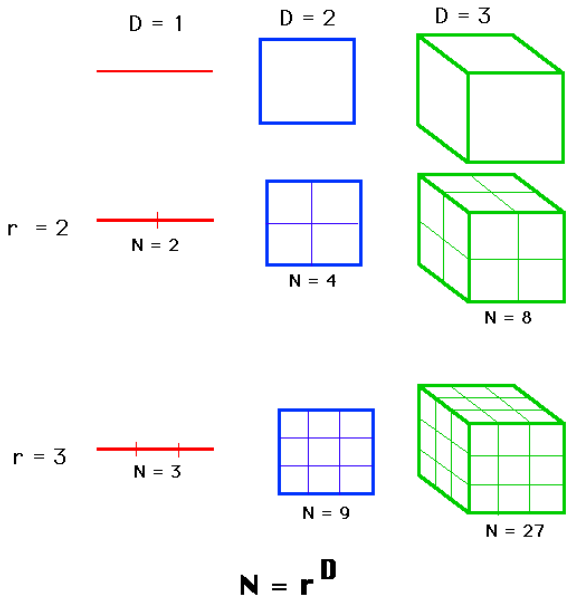
Lý do mà chúng ta đưa ra là: một điểm trên đường thẳng (trục số) được xác định bởi *1* con số *x*; một điểm trong mặt phẳng (mặt phẳng tọa độ) được xác định bởi *2* con số *(x,y)*; và một điểm trong không gian được xác định bởi *3* con số *(x,y,z).* Chúng ta chấp nhận thoải mái và không có gì hoài nghi cả.

Cũng trong tinh thần đó, khi nói *đoạn thẳng là hình có 1 chiều, hình vuông là hình có 2 chiều, và hình lập phương là hình có 3 chiều*, chúng ta cũng chấp nhận dễ dàng, có thể nhờ trực giác. Thật ra cần phải có lời giải thích bởi vì trực giác không phải lúc nào cũng đáng tin cậy.

Ta thử đề nghị cách giải thích sau đây, và từ cách giải thích này chúng ta sẽ hiểu được định nghĩa số chiều cho một hình phân dạng.

Hình dưới đây khởi đầu gồm 1 đoạn thẳng, một hình vuông, và một hình lập phương (khối vuông). Ta lần lượt chia đoạn thẳng thành 2, 3 đoạn bằng nhau;

hình vuông thành 4, 9 hình vuông nhỏ bằng nhau; khối vuông thành 8, 27 khối vuông nhỏ bằng nhau.



Trong sơ đồ trên, *r* là yếu tố bị chia, N là số hình nhỏ đồng dạng với hình cũ, và D là số chiều. Ba đại lượng này liên kết với nhau qua hệ thức:

$$N = r^D. \quad (1)$$

Thí dụ trong hình, hàng thứ ba, ta có thể thấy công thức (1) được kiểm chứng như sau. Yếu tố bị chia *r = 3*. Đoạn thẳng bị chia thành *N = 3* đoạn thẳng nhỏ, và số chiều của đoạn thẳng *D = 1*. Cũng trong hàng này, hình vuông bị chia thành *N = 9* hình vuông nhỏ, và số chiều của hình vuông *D = 2*, trong khi đó với khối vuông thì *N = 27* và *D = 3*.

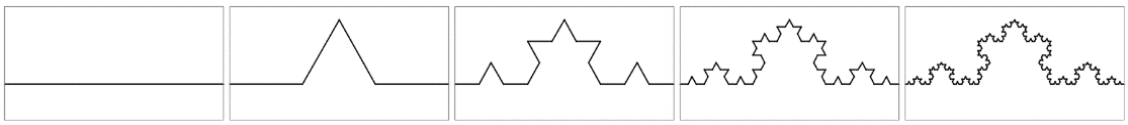
Phương trình (1) có dạng tương đương sau đây khi được chuyển qua *ln* (logarithm tự nhiên, tức là logarit cơ số *e*):

$$D = \frac{\ln N}{\ln r}. \quad (2)$$

Đối với các hình phân dạng, công thức định số chiều vẫn là (2) trong đó:

N = số các mảnh tự đồng dạng và r = yếu tố bị chia.

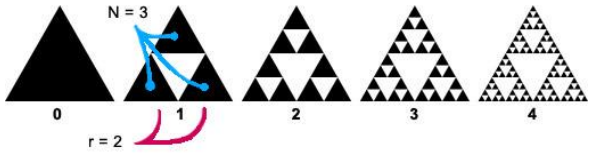
- Bông tuyết Koch:



Vì r = 3 và N = 4 cho nên

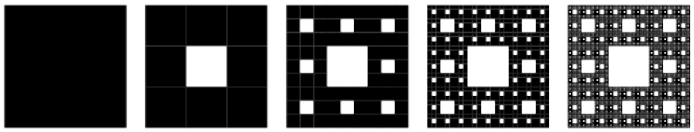
$$\text{Số chiều} = D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.261.$$

- Tam giác Sierpinski:



$$\text{Số chiều} = D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585.$$

- Tấm thảm Sierpinski:



Vì r = 3 và N = 8 cho nên

$$\text{Số chiều} = D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.892.$$

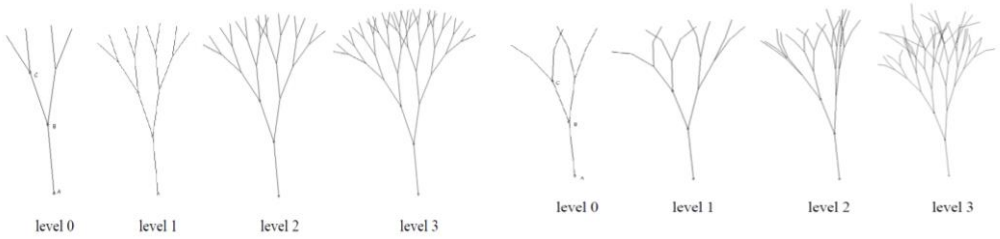
Nhận xét:

1. Số chiều trong các trường hợp trên đều không phải là số nguyên. Số chiều càng gần 1 thì tập hợp càng gần với một đường (thẳng hay cong), số chiều càng gần 1.5 thì tập hợp càng gần với tam giác, và số chiều càng gần 2 thì tập hợp càng gần với hình vuông.
2. Người ta còn có thể định nghĩa số chiều của một tập hợp một cách khác, có thể chính xác hơn - thích ứng cho cả cho những trường hợp hình phân dạng phức tạp hơn – bởi công thức sau

$$D = \limsup_{r \to 0} \left(\frac{\ln N}{\ln r} \right) . \quad (3)$$

Số chiều của một tập hợp định bởi công thức (3) có tên là *box dimension* (chúng tôi chưa có từ Việt để chuyển). Ngoài ra còn nhiều công thức khác để định số chiều của một tập hợp, nhưng tất cả đều phải trùng nhau ở những hình đơn giản diễn tả được bằng hình học Euclid.

6. Một số hình phân dạng trong tự nhiên.



Hai mẫu phân nhánh cây (dựa theo thiên nhiên).

Rừng cây trút lá mùa đông.

Một loại lá dương xỉ.

Bông cải Romanesco

Bắp cải tím (cắt ngang).

Một loại sinh vật biển (sea-urchin).

Thiên nhiên hùng vĩ cũng có hình phân dạng.

Bí mật của thiên nhiên: Hình chụp trên một cánh đồng lấy từ
http://alexandraduchesne.blogspot.com/

Thư Mục

Hiện nay tài liệu để học tập và nghiên cứu về *Hình học phân dạng* có nhiều. Chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc có quan tâm một vài tài liệu có tính cách giáo khoa ít đòi hỏi kiến thức ban đầu như dưới đây.

1. Falconer K., *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
2. Falconer K., *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
3. Falconer K., *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
4. Frame M., Mandelbrot B., Neger N., *Fractal geometry*. Yale University, 2005.
5. Hata M., Kigami J., Yamaguti M., *Mathematics of Fractals*. Amer. Math. Soc., 1997.
6. Leifsson P., *Fractal sets and Dimensions.* www.diva-portal.org/smash/get/diva2:22333/FULLTEXT01.pdf

Tất cả các sách trên đều có tính cách giáo khoa, viết rất có hệ thống, dễ học. Falconer là tác giả một loạt sách giáo khoa về hình phân dạng và số chiều của hình phân dạng. Sách viết rất nghiêm túc, đã và đang là tài liệu giáo khoa cho nhiều trường. Riêng cuốn cuối, đó là Luận Án của Partik Leifsson, một sinh viên Cao học Thụy Điển, trình năm 2006. Sách được biên soạn lại, dễ đọc.