Một cái nhìn mới về chuyện

Ba Bài Toán Cổ Hy Lạp

Lê Quang Ánh, Ph.D.

Tóm tắt.

Bài viết này có hai phần. Trong phần đầu, chúng tôi sẽ trình bày ba bài Toán cổ nổi tiếng của người Hy lạp không giải được bằng thước kẻ[1] và compa. Trong phần hai chúng tôi sẽ trình bày sơ lược về *trường mở rộng, trường các số dựng được* và phát biểu *định Lý Wantzel.* Từ đó chứng minh được ba bài toán cổ Hy Lạp là không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

Bài viết có tính phổ thông, cho nên trong phần hai chúng tôi chỉ nêu các ý chính cần thiết của lý thuyết trường thông qua thí dụ, tuy nhiên chúng tôi vẫn bảo đảm tính chính xác Toán học của nội dung.

I. Ba bài toán cổ Hy Lạp

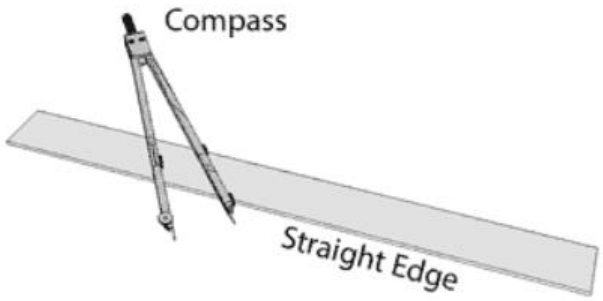
Những bài toán dựng hình bằng thước kẻ và compa được người Hy lạp quan tâm từ rất lâu, trước thời Euclid hàng trăm năm. Ba tiên đề đầu tiên của Euclid trong bộ *Elements* qui định "luật chơi" rõ ràng hơn:

1. Qua hai điểm dựng được một đường thẳng.
2. Một đoạn thẳng (hữu hạn) có thể được kéo dài thành một đường thẳng (vô hạn).
3. Có thể dựng được một đường tròn với tâm là một điểm cho sẵn và bán kính bằng độ dài một đoạn thẳng cho sẵn.

Người Hy lạp có thể dựng được rất nhiều bài toán bằng thước kẻ và compa một cách chặt chẽ, tức là tuân thủ sát sao các "luật chơi" trên. Thí dụ như dựng đường trung trực của một đoạn thẳng, đường phân giác của một góc, dựng tam giác đều với độ dài các cạnh cho sẵn, dựng được dộ dài $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$….Tuy nhiên có ba bài toán sau đây các nhà Toán học không làm được, mặc dù qua thời gian hàng nghìn năm với với nổ lực không ngừng. Và họ cũng *không thể chứng minh* được là ba bài toán ấy *không thể giải được* bằng thước kẻ và compa. Cho tới thế kỷ 19, chính xác là vào năm 1837, tức là hơn 2 ngàn năm sau, Pierre Wantzel (1814 – 1848), một nhà Toán học người Pháp, chứng minh được ba bài toán ấy là không thể giải được bằng thước kẻ và compa. Khi ấy ông mới 23 tuổi. Đó là các bài toán:

[1] Thước kẻ nói ở đây là thước kẻ không chia khắc (unmarked ruler).

Khai phương hình tròn (*Squaring the circle*), ***Tam phân góc*** (*Trisecting the angle*), và ***Nhân đôi khối vuông*** (*Duplicating the cube*).



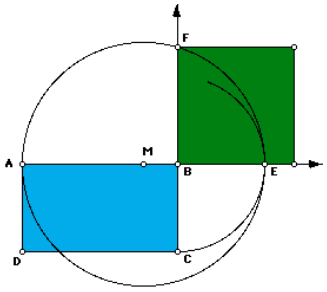
1.1 Vài bài toán khai phương đơn giản

Khai phương một hình nào đó là vẽ (dựng) một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình cho sẵn.

Trước khi đi vào xem xét vài thí dụ về khai phương, độc giả nên ghi nhớ rằng *giao điểm của hai đường đã dựng được xem như dựng được*, từ đó góc vuông, trung điểm của một đoạn thẳng, phân giác của một góc,…vân vân là những hình xem như dựng được.

Dưới đây là vài bài toán khai phương đơn giản mà người Hy lạp cổ đại đã biết làm.

1. ***Khai phương hình chữ nhật***.



Cho sẵn hình chữ nhật ABCD. Dựng điểm E trên phần nối dài của đường thẳng AB về phía B sao cho BE = BC. Dựng trung điểm M của đoạn AE. Dựng đường tròn tâm M đường khính AE. Dựng giao điểm F của đường thẳng CB và đường tròn này. Dựng hình vuông BFLK. Diện tích hình vuông này bằng diện tích hình chữ nhật ABCD đã cho.

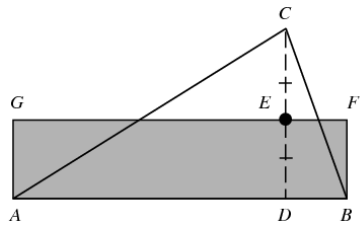
Chứng minh: Tam giác AEF vuông ở F có đường cao FB, cho nên

$$dt(ABCD) = BA.BC = BA.BE = BF^2.$$

$$dt(BFLK) = BF^2.$$

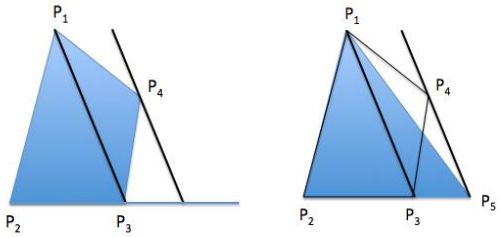
Vì vậy diện tích hình vuông BFLK bằng diện tích hình chữ nhật ABCD. □

2. ***Khai phương hình tam giác***.



Cho sẵn tam giác ABC. Để khai phương tam giác này, ta chỉ cần dựng được một hình chữ nhật có cùng diện tích với tam giác, rồi áp dụng thí dụ 1.
Dựng đường cao CD của tam giác ABC. Dựng trung điểm E của CD. Dựng hai hình chữ nhật ADEG và DEFB. Khi ấy hình chữ nhật ABFG có cùng diện tích với tam giác ABC. Kiểm chứng khá dễ dàng. □

3. ***Khai phương hình đa giác lồi***.
Cho một tứ giác lồi $P_1P_2P_3P_4$. Ta chỉ cần dựng được một tam giác có diện tích bằng diện tích tứ giác ấy là đủ. Muốn vậy qua P_4 ta dựng đường thẳng song song với đường thẳng P_1P_3. Dựng giao điểm P_5 của đường thẳng này với đường thẳng P_2P_3. Khi ấy diện tích hai tam giác $P_1P_3P_4$ và $P_1P_3P_5$ là bằng nhau. Suy ra tam giác $P_1P_2P_5$ và tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ có diện tích bằng nhau . □
Bằng cách ấy ta có thể đem ngũ giác về tứ giác, lục giác về ngũ giác,…và như vậy có thể đem một đa giác lồi *n* cạnh về một tam giác.



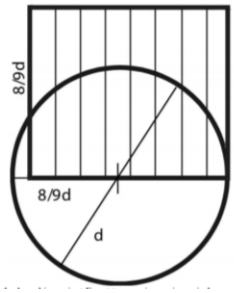
1.2 Bài toán khai phương hình tròn

Khai phương một hình tròn tức là dựng một hình vuông có cùng diện tích với diện tích hình tròn. Đây là một trong những bài toán hấp dẫn trong lịch sử phát triển Toán học từ thời cổ đại cho tới thời kỳ cận đại. Bài toán này có liên quan đến bài toán xác định số π.
Người ta tìm thấy bài toán này xuất hiện đầu tiên trong một tài liệu cổ Ai Cập có tên là *Rhind Papyrus,* đặt theo tên của nhà Ai Cập học người Anh Henry Rhind (1833 – 1863). Ông ta mua được tài liệu này vào năm 1858. Đó là một cuộn giấy, loại giấy cổ, dài 6 mét, khổ (ngang) 1/3 mét, do một người Ai Cập tên là Ahmes chép lại vào năm 1650 trước Tây lịch. Tài liệu gốc được cho là xuất hiện trước đó

khoảng 200 năm, có nghĩa là tài liệu gốc được viết khoảng năm 1850 trước Tây lịch.

Một trang của *Rhind Papyrus*, tài liệu hiện được lưu giữ tại British Museum.

Trong *Rhind Papyrus*, có bài toán số 50 liên quan đến việc khai phương hình tròn. Lời giải như sau: Dựng một đường kính của hình tròn, bỏ 1/9 đường kính này, dựng hình vuông có cạnh bằng 8/9 phần còn lại của đường kính. Khi ấy diện tích hình vuông bằng diện tích hình tròn (xem hình dưới). Ta thử xem phép tính đúng cỡ nào.



Diện tích hình vuông $= \left(\frac{8d}{9}\right)^2$ = diện tích hình tròn = $\frac{\pi d^2}{4}$.

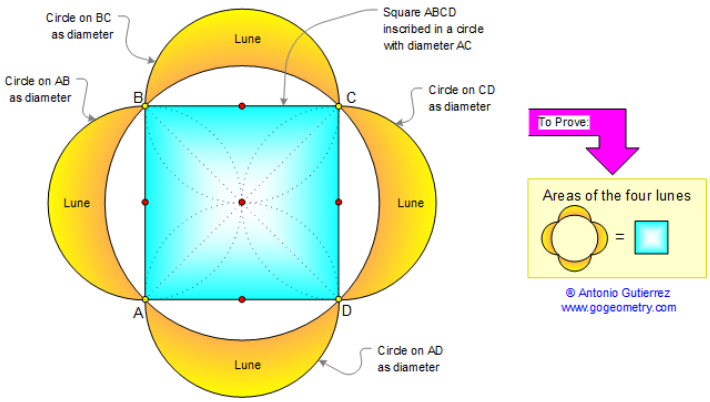
$$\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} = 3.1605.$$

Một giá trị khá chính xác của số π (so với 3.14159) có được từ gần 2 ngàn năm trước Tây lịch. Trong *Rhind Papyrus*, không có thêm chi tiết cách dựng hình.

Người Hy Lạp cổ đại quan tâm nhiều đến việc làm thế nào dựng được hình vuông có cùng diện tích với hình tròn bằng thước kẻ và compa. Trong quá trình tìm kiếm lời giải (chưa có ai tìm ra), họ trải qua một số bài toán trung gian thú vị.

Người đầu tiên được ghi nhận quan tâm đến vấn đề là **Anaxagoros** (khoảng 499 - 427 trước TL). Ông ta giải toán trong thời gian ở trong tù (bị cho là có cảm tình với người Ba Tư). Chuyện này do nhà văn Hy Lạp Plutarch (khoảng 46 – 120 sau TL) kể lại. Không có dấu vết lưu lại những gì Anaxagoros đã làm được.

Tiếp theo là **Hippocrates of Chios** (khoảng 440 trước TL) – tức là Hippocrates người của đảo Chios[2], một hòn đảo nhỏ của Hy Lạp. Ông chứng minh được diện tích bốn hình "trăng lưỡi liềm" (gọi là Lunes of Hippocrates) bằng diện tích hình vuông trong bài toán sau (do Simplicius, khoảng 530 sau TL, viết lại). Đây được xem là bài giải một phần của bài toán *khai phương hình tròn.*



Cho hình vuông ABCD cạnh có chiều dài *a* nội tiếp trong đường tròn. Bên ngoài hình vuông dựng các nửa đường tròn đường kính là các cạnh hình vuông. Phần mặt phẳng nằm giữa các nửa đường tròn này với đường tròn ngoại tiếp của hình vuông là các *trăng lưỡi liềm Hippocrates.* Hippocrates chứng minh được rằng tổng diện tích bốn mặt trăng ấy bằng diện tích hình vuông ABCD như sau:

Diện tích hình vuông = a^2.

Diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông = $(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 \pi = \frac{a^2}{2}\pi$.

Diện tích nửa hình tròn vẽ trên cạnh hình vuông = $\frac{a^2}{8}\pi$.

Diện tích một mặt trăng lưỡi liềm = $\frac{a^2}{8}\pi - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}\pi - a^2\right)\right] = \frac{a^2}{4}$.

Như vậy tổng diện tích bốn mặt trăng ấy bằng diện tích hình vuông ABCD. □

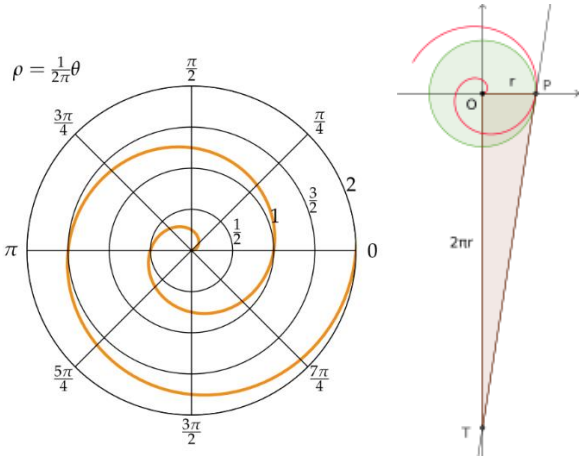
Archimedes (287 – 212 trước TL) là nhà Toán học cổ Hy Lạp đi khá xa trong vấn đề này. Trong bài viết *Measurement of a Circle* (*phép đo đường tròn*) Archimedes đã chứng minh được ba tính chất sau đây:

1. Diện tích hình tròn bằng diện tích tam giác vuông mà hai canh góc vuông có độ dài là bán kính và chu vi hình tròn.
2. Diện tích hình tròn bằng diện tích hình vuông có cạnh dài bằng đường kính hình tròn nhân với tỉ số $\frac{11}{14}$.
3. Tỉ số giữa chu vi hình tròn và độ dài đường kính của nó nằm giữa hai giá trị $3 + \frac{10}{71}$ và $3 + \frac{10}{70}$.

[2] Không nên lầm lẫn với Hippocrates of Cos, người của đảo Cos, cũng là một hòn đảo nhỏ của Hy Lạp, cha đẻ của Y học (lời thề Hippocrates của sinh viên Y khoa khi tốt nghiệp).

Qua tính chất thứ nhất, Archimedes đã đưa bài toán khai phương hình tròn về bài toán "*thẳng hóa*" (*rectification*) chu vi hình tròn, nghĩa là bài toán dựng (hình học) số π. Với tính chất thứ ba, Archimedes đã cung cấp cho ta một giá trị khá đơn giản và khá chính xác số π. Đó là π = $\frac{22}{7}$ (≈ 3,143). Về tính chất thứ hai, đó chỉ là hệ quả của hai tích chất kia mà thôi. Việc diện tích hình tròn tỉ lệ thuận với bình phương đường kính của nó đã được Euclid nói tới rồi[3], ở đây Archimedes chỉ thêm chi tiết về hằng số tỉ lệ.

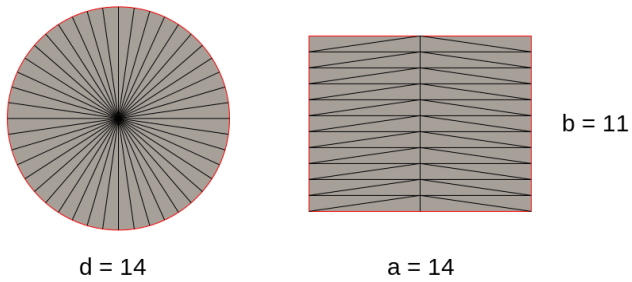
Như vậy Archimedes vẫn chưa đưa ra được cách dựng hình học (thước kẻ và compa) của bài toán khai phương hình tròn. Archimedes có ý muốn nhân bài toán này, đưa nó sang một lối rẽ khác. Trong tác phẩm *On Spirals* (*về những đường xoắn ốc*), Archimedes mô tả rằng việc dựng tiếp tuyến với đường xoắn ốc (mang tên *đường xoắn ốc Archimedes*) cho phép giải bài toán "*thẳng hóa*" chu vi hình tròn. Có người nói như vậy là Archimedes đã giải xong bài toán khai phương hình tròn, nhưng chính Archimedes thì phủ nhận vì đường xoắn ốc của ông và tiếp tuyến của nó không thể dựng được bằng thước kẻ và compa (Theo M. Chasles, *Aperçu Historique*…, p. 15-16).



Đường xoắc ốc Archimedes và tiếp tuyến. Hình tròn và tam giác OPT có cùng diện tích.

Qua đến thời kỳ trung cổ ở Châu Âu có nhà Toán học Franken de Liège (khoảng 1020 – 1083) quan tâm tới bài toán này. Trong tác phẩm *De quadratura circuli* (*khai phương hình tròn*) xuất bản năm 1050, Francon giải bài toán với hình tròn có đường kính *d = 14* một cách cụ thể.

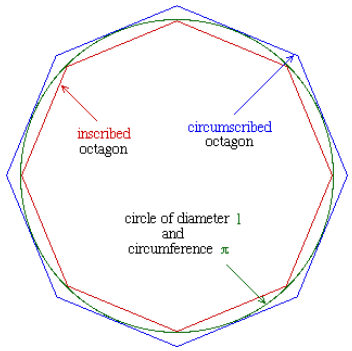
[3] *Éléments d'Euclide*, livre XII, § 2.



Ông chia hình tròn thành 44 quạt tròn (sectors) rồi ráp lại thành một hình chữ nhật kích thước *a = 14 và b = 11*. Như vậy

$$14 \times 11 = 154 = 7^2 \times \pi, \text{ và do đó } \pi = \frac{22}{7}.$$

Qua thế kỷ 17, trong tác phẩm *De circuli magnitudine inventa* xuất bản vào năm 1654, người ta thấy nhà Toán học **Christian Huygens** (1629 - 1695) cho nội tiếp và ngoại tiếp hình tròn bởi những đa giác đều, rồi tính diện tích hai đa giác ấy. Phương pháp này được cho là do Archimedes đã nghĩ ra, nhưng Archimedes không đi xa hơn. Huygens cho tăng dần số cạnh của hai đa giác để hy vọng tìm ra diện tích hình tròn. Tiếc thay, thời ấy chưa có khái niệm giới hạn, và ông bế tắc khi đối diện với chuỗi số vô tận.



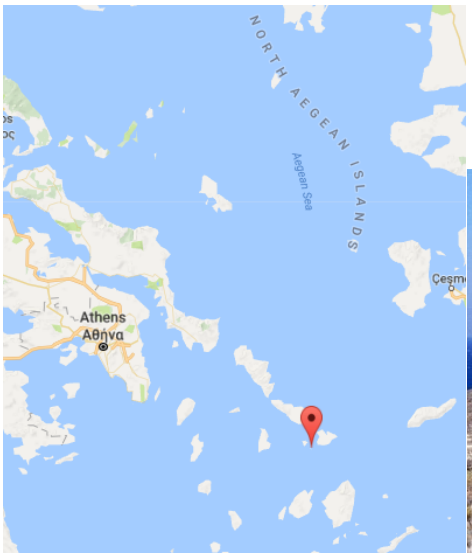
Bài toán khai phương hình tròn giải bằng thước kẻ và compa còn trải qua nhiều thăng trầm nữa, nhưng tựu trung lại cũng chỉ là bài toán dựng số $\sqrt{\pi}$ bằng thước kẻ và compa. Người ta không giải được và cũng không chứng minh được là bài toán không thể giải được. Phải đợi đến thế kỷ 19.

1.3 Bài toán nhân đôi một khối vuông

Bài toán này còn được biết dưới tên là *Bài toán Delian*[4] do câu chuyện bi thảm sau đây. Vào năm 429 trước TL, có một trận dịch hoành hành ở Athens giết chết một

[4] Cư dân của đảo Delos (Hy Lạp) được gọi là Delian.

phần tư dân số thành phố. Thiên tai kéo dài dai dẳng, tái đi tái lại, nguyên do được cho là thần linh đòi mạng Pericles[5].



Vị trí đảo Delos trong biển Eagea và dấu tích đền đài trên đảo còn lại ngày nay. (Wikipedia).

Đảo Delos nằm trong biển Eagea, một phần của Địa Trung Hải, trải dài từ Hy Lạp cho tới đảo Crete. Đó là một đảo nhỏ, khô cằn, nằm ở giữa quần đảo Cyclades (cycle = cái vòng tròn), một chòm đảo nằm vòng quanh đảo Delos. Vì có vị trí trung tâm đặc biệt trong quần đảo Cyclades nên người Hy Lạp cổ đại coi Delos là nơi linh thiêng, và do đó mỗi thành phố trên đất nước Hy Lạp xây một ngôi đền dành cho vị thần của thành phố của mình trên mảnh đất này. Vết tích đền đài đổ vỡ trên đảo vẫn còn nhìn thấy ngày nay. (Có thể đến đảo này bằng thuyền dễ dàng, đi từ thành phố Mykokos gần đó).

Khi trận dịch lan tràn khắp Athens vào năm 430 trước TL, dân Athens cố gắng giành lại cuộc sống trước điều mà họ tin rằng là sự phẫn nộ của các vị thần linh. Họ cử một phái đoàn đến đền Delphi, đền này nằm trong đất liền không xa Athens là bao, để xin lời sấm truyền của các thần linh về số phận của họ. Sấm truyền rằng: "*Thần Apollo muốn làm gấp đôi ngôi đền của mình trên đảo Delos*."

Dân Athens hăm hở xúc tiến công việc. Người ta làm gấp đôi chiều dài, chiều rộng, và chiều cao ngôi đền Athenian, nơi thờ thần Apollo trên đảo Delos. Nhưng bệnh dịch vẫn tiếp tục hoành hành. Vì thế dân Athens lại gởi một đoàn đại biểu nữa đến đền Delphi để xin sấm truyền tại sao thần Apollo vẫn còn lên cơ thịnh nộ với họ và cầu xin chấm dứt cơn dịch bệnh, và dù sao họ cũng đã thực hiện đúng những

[5] Pericles là một vị tướng, một chính khách có tài hùng biện và có ảnh hưởng lớn trên Athens trong thời kỳ vàng của Hy Lạp (Wikipedia).

gì sấm truyền đã bảo họ phải làm. "*Không*," sấm truyền trả lời, "*các người đã không làm đúng những gì phải làm. Hãy trở về Delos và làm những gì mà thần linh đã yêu cầu*."

Những người thợ và kỹ sư của Athens mau chóng hiểu ra là tại sao họ thất bại: Thần Apollo muốn *thể tích* ngôi đền hình khối được nhân đôi lên, chứ không phải các cạnh được nhân đôi. Nếu họ nhân đôi các cạnh của ngôi đền hình khối thì họ đã tăng thể tích lên 8 lần vì

$$2a.2b.2c = 2^3\, abc = 8abc.$$

Điều họ cần làm để tăng gấp đôi thể tích ngôi đền là phải tăng chiều dài, chiều rộng, và chiều cao ngôi đền bằng cách nhân độ dài ba cạnh ấy với thừa số bằng *căn số bậc ba của 2.* Chỉ có cách này mới làm thể tích tăng gấp đôi lên thôi, vì

$$\sqrt[3]{2}\, a.\ \sqrt[3]{2}\, b.\ \sqrt[3]{2}\, c = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 abc = 2abc.$$

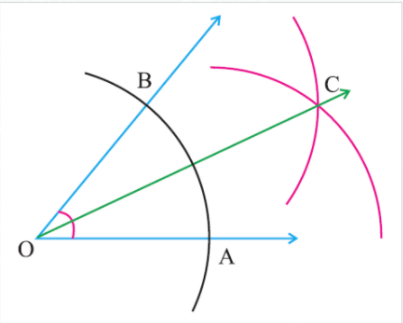
Những người thợ xây và những kỹ sư hiểu ra rằng họ phải quay về hình khối của ngôi đền nguyên thủy, dùng những dụng cụ nghề nghiệp, nghĩa là thước kẻ và compa, nới dài ba cạnh của ngôi đền bằng cách nhân các độ dài với với thừa số là *căn số bậc ba của 2.* Nhưng họ không làm được, và cơn dịch bệnh vẫn tiếp tục hoành hành.

Như chúng ta sẽ thấy, công trình của Pierre Wantzel ở thế kỷ 19 chứng minh rằng bài toán Delian của câu chuyện trên - gấp đôi thể tích một hình khối cho sẵn mà chỉ dùng thước kẻ và compa – tức là bài toán dựng hình học một đoạn thẳng có chiều dài bằng $\sqrt[3]{2}$, là không giải được.

1.4 Bài toán tam phân góc

Tam phân một góc là chia góc ấy thành ba góc bằng nhau. Cũng như hai bài toán trước, việc làm phải được thực hiện bằng thước kẻ và compa.

Trước hết ta nhắc lại rằng, từ thời cổ đại, người ta đã biết cách dùng thước kẻ và compa để chia bất kỳ một góc nào thành *hai* góc bằng nhau (*dựng phân giác một góc*). Hình vẽ dưới đây cho thấy cách dựng bài toán đơn giản ấy:



Cách dựng: Cho góc xOy. Dựng hai điểm A và B trên Ox và Oy sao cho OA = OB. Dựng một cung tròn tâm A và một cung tròn tâm B cùng bán kính, bán kính đủ lớn cho chúng cắt nhau tại C. Tia OC là phân giác của góc AOB. □

Việc chia một góc bất kỳ ra thành hai góc bằng nhau quá dễ dàng khiến cho người ta nghĩ đến việc chia một góc bất kỳ ra thành ba góc bằng nhau. Ngoại trừ một số trường hợp đặc biệt, như trường hợp chia góc vuông mà chúng ta sẽ nói dưới đây, còn trường hợp tổng quát bài toán chưa giải được mặc dù trải qua hàng ngàn năm thử thách.

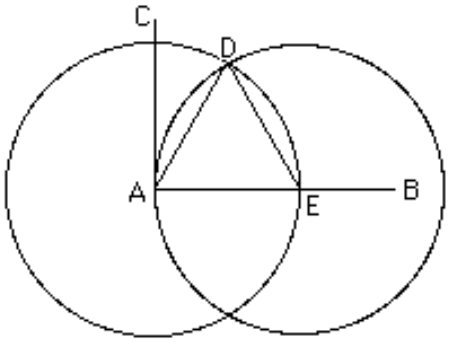
Hippias của thành phố Elis (nằm ở phía Tây-Nam Hy Lạp), sống cùng thời với Socrates (thế kỷ thứ năm trước TL), được xem như là người đầu tiên giải bài toán này và thất bại. Tiếp theo sau là danh sách nhiều nhà Toán học khác: Hippocrates, Archimedes, Nicomedes, Pappus, Leonardo da Vinci, Descartes, Pascal, Leibniz, Newton, Gauss,… Tất cả họ đều không thành công với hai dụng cụ thước kẻ và compa (đôi khi họ vi phạm luật chơi mà không biết như trường hợp Hippocrates và Archimedes), cho nên họ nghĩ ra cách khác, trong đó có cách cơ học và cách dựa trên những đường cong mới do họ sáng tạo ra.

Bài toán này, cũng như bao nhiêu bài toán khó khác, đã thúc đẩy sự phát triển của Toán học về nhiều hướng khác nhau, khác với mục đích nguyên thủy.

Dưới đây ta hãy xem một số cách giải bài toán này, đúng luật chơi, hoặc nhờ những phương tiên khác.

1. *Tam phân góc vuông*.

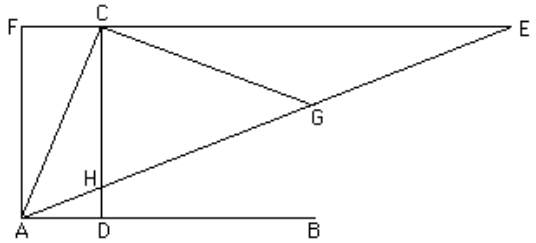
Đây là trường hợp đặc biệt *giải được* bằng thước kẻ và compa. Cách giải:



Cho góc vuông BAC. Dựng đường tròn tâm A cắt AB tại E. Dựng đường tròn tâm E cùng bán kính với đường tròn trước. Hai đường tròn cắt nhau tại D. Tam giác AED đều, cho nên góc CAD = 30 độ. Chỉ cần chia đôi góc BAD = 60 độ là xong. □

Sau đây chúng tôi giới thiệu một số cách giải khác cho bài toán tam phân một góc tổng quát.

2. *Tam phân góc bất kỳ: cách của Hippocrates.*



Cho một góc BAC (tùy ý). Dựng CD vuông góc với AB tại D. Dựng hình chữ nhật ADCF. Trên nửa đường thẳng FC (về hướng C) <u>lấy một điểm E sao cho AE cắt CD tại H với HE = 2AC.</u> Khi ấy góc BAE bằng 1/3 góc BAC.

Chứng minh: Gọi G là trung điểm của đọan thẳng HE. Hiển nhiên là

$$AC = CG = HG = GE.$$

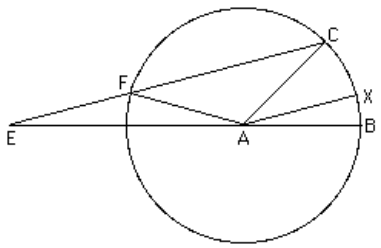
Tam giác ACG cân ở C và tam giác CGE cân ở G, từ đó suy ra

$$\widehat{CAE} = \widehat{AGC} = 2\,\widehat{GCE} = 2\,\widehat{BAE}. \ \square$$

Rõ ràng là việc chọn điểm E thỏa điều kiện trên phải cần tới cây thước *có khắc chia*. Như thế là vi phạm "luật chơi".

3. *Tam phân góc bất kỳ: cách của Archimedes.*

Lời giải sau đây do người Ả Rập viết, được tìm thấy trong sách *Book of Lemmas* (*sách các bổ đề*). Người ta cho rằng đây là lời giải của Archimedes vì lời giải mang phong cách viết của Archimedes áp dụng trong tác phẩm *On spirals* (*Về các đường xoắn ốc*).



Cho góc bất kỳ đỉnh A. Dựng đường tròn tâm A cắt hai cạnh của góc tại hai điểm B và C. Kéo dài đường thẳng AB về phía A. Trên phần đường thẳng này <u>lấy một điểm E sao cho EC cắt đường tròn tại F thỏa điều kiện EF = AB = bán kính đường tròn</u>. Qua A dựng tia song song với đường thẳng EC, tia này cắt đường tròn tại X. Góc BAX bằng 1/3 góc BAC.

Chứng minh: Dễ dàng thấy rằng

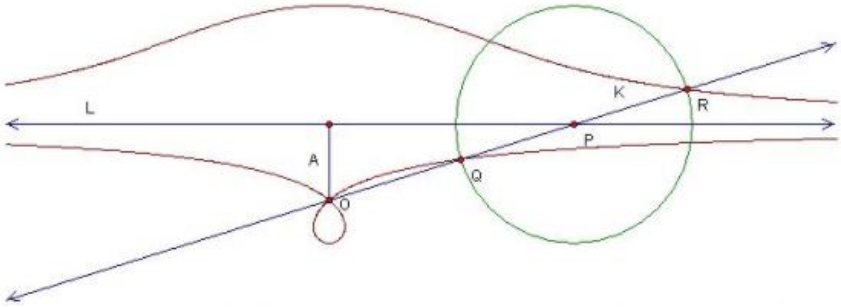
$$\widehat{CEA} = \widehat{BAX}$$
$$\widehat{CFA} = \widehat{ACE} = 2\,\widehat{CEA}$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{CEA} + \widehat{ACE}.$$

Từ đó suy ra được $\widehat{BAX} = \frac{1}{3}\widehat{BAC}$. □

Cách chọn điểm E thỏa điều kiện EF = bán kính đường tròn phải cần tới cây thước có chia khắc (cho cây thước chuyển động quanh điểm C). Lại vi phạm "luật chơi".

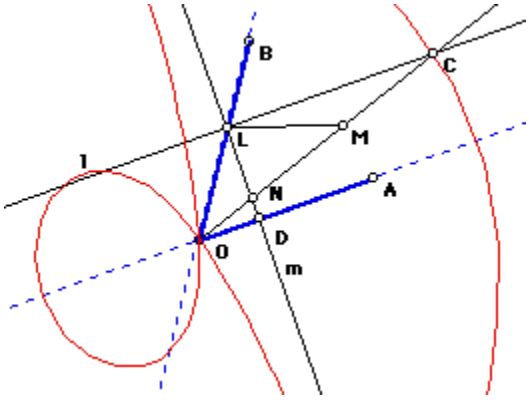
4. *Tam phân góc bất kỳ bằng cách dùng đường cong conchoid của Nicomedes.*

Trước hết ta hãy xem cách Nicomedes (khoảng 280 – 210 trước TL) tạo ra đường cong conchoid như thế nào.



- Cho một đường thẳng *L* và một điểm O không nằm trên đường thẳng ấy (xem hình trên). Qua O vẽ một đường thẳng di động, đường thẳng này cắt đường thẳng *L* tại điểm P. Trên đường thẳng di động ấy dựng các điểm Q và R sao cho PQ = PR = *d*, một độ dài cho sẵn. Khi đường thẳng di động quay quanh O thì tập hợp các điểm Q và R tạo thành đường cong gọi là *conchoid Nicomedes*. O gọi là cực và đường thẳng *L* là tiệm cận của đường cong conchoid.

  Đường cong này gồm hai phần riêng biệt, tiệm cận với đường thẳng *L* và nằm hai bên đường ấy. Trong phần sau ta chỉ chú ý đến phần ở phía trên, quỹ tích của điểm R (đối diện với điểm O).



- Cách tam phân một góc nhờ đường cong conchoid (xem hình trên):

  Cho một góc AOB tùy ý. Dựng điểm *L* trên cạnh OB với *OL* = $\frac{d}{2}$ (d là một độ dài cho sẵn). Dựng đường thẳng *m* qua L vuông góc với OA. Đường thẳng

qua L vuông góc với m cắt đường cong conchoid (cực O, tiệm cận *m* và hằng số *d*) tại C. Khi ấy góc AOC bằng 1/3 góc AOB.

Chứng minh: Gọi N là giao điểm của OC và *m*, và M là trung điểm của NC. Ta có:

$$OL = \frac{d}{2} \text{ (do cách dựng).}$$

$$LM = MN = MC = \frac{d}{2} \text{ (do định nghĩa của conchoids và do tam giác CLN vuông ở L). Suy ra:}$$

$$\widehat{LOC} = \widehat{LMO} = 2\,\widehat{LCO} = 2\,\widehat{AOC}.$$

Do đó $\widehat{AOC} = 1/3\,\widehat{AOB}$. □

Rõ ràng là các cách tam phân một góc bất kỳ theo kiểu Hippocrates, Archimedes, hay là dùng đường conchoid của Nicomedes đều đúng nhưng không tuân thủ "luật chơi" nghĩa là dùng thước kẻ và compa. Có thể họ đã nghĩ hết cách mà không làm được nên phải sáng tạo ra cách riêng để giải bài toán này. Về sau còn nhiều nổ lực nữa của nhiều nhà Toán học các thế hệ nối tiếp cũng không làm được, cho nên họ đã nghĩ ra nhiều cách khác nhau nữa, và như thế Toán học có dịp phát triển.

II. Khái niệm về trường, trường các số dựng được – Định lý Wantzel

Trong phần dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày vài nét chính về *trường* (*field*), *trường mở rộng hữu hạn, trường các số dựng được* và phát biểu *định lý Wantzel.* Sau đó chúng tôi sẽ áp dụng định lý này để giải thích tại sao ba bài toán cổ Hy Lạp không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

2.1 Trường là gì?

- Có một tập hợp không rỗng trên đó có hai phép toán cộng (+) và nhân (.) như hai phép toán thông thường trên tập hợp các số thực. Mỗi một phần tử *a* có một phần tử đối xứng đối với phép cộng, ghi là $-a$, và nếu $a \neq 0$ thì nó sẽ có một phần tử nghịch đảo, ghi là a^{-1}. Điều này cho phép thiết lập hai phép toán khác như sau:

  $a - b = a + (-b)$: phép trừ.

  $a.b = a.\,b^{-1}$: phép chia.

  Người ta nói tập hợp đã cho cùng với hai phép toán cộng và nhân ấy tạo thành một trường.

- Hai trường mà chúng ta thường gặp nhất là trường các số thực $\mathbb{R}$ và trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Ngoài ra ta biết rằng

  $$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

ta nói $\mathbb{Q}$ là một *trường con* của trường $\mathbb{R}$. Chúng ta cũng ý rằng, tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ trang bị hai phép toán cộng và nhân như trên *không phải là* một trường (vì $a \in \mathbb{Z}$ nhưng $a^{-1} \notin \mathbb{Z}$ khi $a \neq \pm 1$).

2.2 Trường mở rộng là gì?

- Coi tập hợp được xác định như sau:

$$\mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Thí dụ như 0, 1 , $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, - 4 + 3$\sqrt{2}$ đều là những phần tử của tập hợp ấy. Tổng và tích của hai phần tử bất kỳ của tập hợp ấy cũng là một phần tử của tập hợp ấy. Chẳng hạn như:

$$(1 + 2\sqrt{2}) + (-4 + 3\sqrt{2}) = -3 + 5\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,(\sqrt{2}).$$

$$(1 + 2\sqrt{2}).(-4 + 3\sqrt{2}) = 8 - 5\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,(\sqrt{2}).$$

Tập hợp ấy có cấu trúc của một trường. Ngoài ra, ta có:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}.$$

Ta nói $\mathbb{Q}\,(\sqrt{2})$ là một trường mở rộng của trường $\mathbb{Q}$.

Mặt khác $\sqrt{2}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $x^2 - 2$ và đó là đa thức đơn giản nhất với hệ số hữu tỷ có tính chất này. Ta nói $\mathbb{Q}\,(\sqrt{2})$ là *trường mở rộng bậc 2* của trường $\mathbb{Q}$. Ta viết $[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

Tương tự như vậy, $\mathbb{Q}\,(\sqrt[3]{2})$ là *trường mở rộng bậc 3* của trường $\mathbb{Q}$ vì $\sqrt[3]{2}$ là nghiệm của đa thức bậc ba $x^3 - 2$. Ta viết:

$$[\mathbb{Q}\,(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3.$$

- Bây giờ ta xét tập hợp

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) &= \mathbb{Q}\,(\sqrt{2})\,(\sqrt{3}) \\ &= \{a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\,(\sqrt{2})\} \\ &= \{a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{2}.\sqrt{3} \;\; / \; a',b',c',d' \in \mathbb{Q}\}.\end{aligned}$$

Người ta chứng minh được rằng $\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3})$ là một mở rộng bậc 2 của $\mathbb{Q}\,(\sqrt{2})$. Ta có thể viết:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subset \mathbb{R},$$

và ta có:

$$[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \text{ và } [\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}\,(\sqrt{2})] = 2,$$
$$[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}\,(\sqrt{2})].\,[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4.$$

Một cách tổng quát, ta có định lý sau đây về bậc của mở rộng trường:

<u>Định lý 1.</u>
Nếu M là một trường mở rộng hữu hạn của trường L và N là một trường mở rộng hữu hạn của trường M:

$$L \subset M \subset N$$

thì N là một trường mở rộng hữu hạn của trường L. Bậc của các mở rộng thỏa công thức:

$$[N : L] = [N : M] \times [M : L].$$

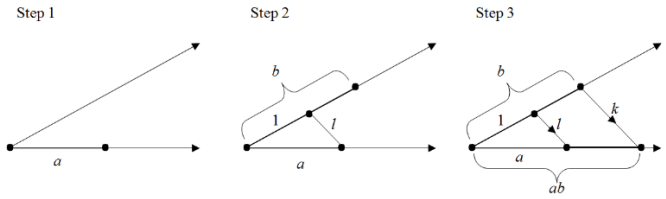
Thí dụ:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}),$$

$$[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}\,] = [\mathbb{Q}\,(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}\,(\sqrt{2})].\,[\mathbb{Q}\,(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4.$$

2.3 Trường các số dựng được.

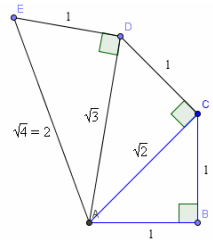
- Một số thực a được gọi là dựng được (constructible) khi người ta có thể dựng được một đoạn thẳng có chiều dài $|a|$ từ đoạn thẳng có chiều dài bằng 1 (đơn vị chiều dài) sau một số bước hữu hạn thực hiện bằng thước kẻ và compa.
- Tất cả các số nguyên đều dựng được. Nếu hai số *a* và *b* dựng được thì tổng của chúng *a + b*, tích của chúng *a.b* đều dựng được.



Hình trên cho thấy cách dựng tích *a.b* khi *a* và *b* là hai số dựng được.

Ta kiểm chứng được rằng *tập hợp các số dựng được là một trường con của trường số thực* $\mathbb{R}$.

Ngoài ra những số thực $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,…đều dựng được (xem hình dưới):



Một cách tổng quát: *Số a dựng được nếu và chỉ nếu số* $\sqrt{a}$ *dựng được.*

- ***Số đại số là gì?***

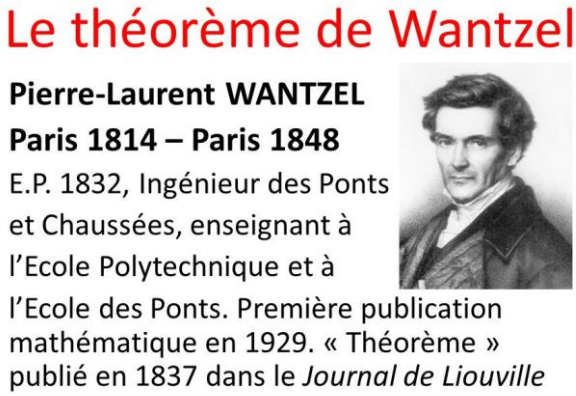
Các số nguyên, các số hữu tỷ đều là nghiệm của nhị thức có hệ số hữu tỷ. Chúng là những *số đại số có bậc nhất.*

Các số $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ lần lượt là nghiệm của các đa thức $x^2 - 2$ và $x^3 - 2$ và đó là những đa thức với hệ số hữu tỷ đơn giản nhất. Chúng là những *số đại số có bậc 2 và 3.*

Người ta chứng minh được rằng *tập hợp các số đại số là một trường con của trường số thực* $\mathbb{R}$.

Năm 1882, nhà Toán học Đức Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) chứng minh được rằng số π *không phải là một số đại số* (*số siêu việt*).

2.4 Định lý Wantzel.



Pierre Wantzel (1814 – 1848)[6], kỹ sư cầu đường khóa năm 1832, giảng dạy tại trường Bách Khoa và trường Cầu Đường. Công bố các tác phẩm Toán học lần đầu tiên vào năm 1829 (15 tuổi). Định lý Wantzel được công bố vào năm 1837 trên tờ *Journal de Liouville*[7]. (Wikipedia).

Dưới đây là định lý Wantzel được phát biểu dưới dạng *ngôn ngữ lý thuyết trường mở rộng.* Thời của Wantzel chưa có lý thuyết này, Wantzel tính toán thông qua Hình học và Đại số cổ điển (có thể xem thêm để biết cách giải quyết vấn đề một cách tuyệt vời của Wantzel trong *A Brief History of Impossibility* do Jeff Suzuki viết).

<u>Định lý 2</u> (Wantzel).

Một số a là dựng được nếu và chỉ nếu tồn tại một số hữu hạn mở rộng trường bậc hai

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r$$

sao cho $a \in K_r$.

---

[6] Ông này cùng thời với Augustin Cauchy (1789 - 1857) và Evariste Galois (1811 - 1832). Những năm 1830, Cauchy đang dạy ở ĐH Bách Khoa.

[7] Bài báo có tiêu đề: *Recherches sur les moyens de connaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec le règle et le compas* (*Nghiên cứu cách nhận biết một bài toán Hình học có thể giải được bằng thước kẻ và compa*). Năm 1837, Wantzel mới 23 tuổi.

Có thể chứng minh định lý này dựa trên định lý 1, nhưng không đơn giản nên người viết bỏ qua. Có thể xem chứng minh đầy đủ ở Exo 7. *Géométrie.* Cours de Mathématiques, Universite de Lille.

Hệ quả:

Mọi số dựng được đều là số đại số có bậc dạng 2^n với số nguyên $n \geq 0$.

2.5 Áp dụng.

Bây giờ ta có thể áp dụng được định lý Wantzel và hệ quả này để chứng minh ba bài toán cổ Hy Lạp là không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

Định lý 3.

Bài toán khai phương hình tròn là không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

Chứng minh:

Gọi *a* là cạnh hình vuông và *r* là bán kính hình tròn.

$$a^2 = \pi r^2$$

$$a = r\sqrt{\pi}\ .$$

Do π không phải là số đại số nên $\sqrt{\pi}$ không phải là số đại số. Theo hệ quả trên, $\sqrt{\pi}$ là số không dựng được. □

Định lý 4.

Bài toán nhân đôi thể tích một khối vuông là không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

Chứng minh:

Bài toán *nhân đôi thể tích một khối vuông* là bài toán dựng số $\sqrt[3]{2}$. Đây là số đại số có *bậc 3*, không thể có dạng 2^n, do đó không phải là số dựng được. □

Định lý 5.

Bài toán tam phân một góc là không thể giải được bằng thước kẻ và compa.

Chứng minh:

Ta chỉ cần đưa ra một trường hợp bài toán không giải được là đủ. Lấy góc $\theta = 60^0$.

Công thức nhân ba lượng giác:

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}.$$

Với $x = \cos\frac{\theta}{3} = \cos 20^0$, ta có phương trình:

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \text{ hay là } 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là số đại số bậc 3, không thể có dạng 2^n, do đó không phải là số dựng được.

Như vậy x không dựng được nên $\frac{\theta}{3} = 20^0$ không dựng được. □

Tài liệu tham khảo.

1. A.D. Aczel. *A Strange Wilderness.* Sterling. New York. 2011.
2. E. T. Bell. *Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1937
3. Exo 7. *Géométrie.* Cours de Mathématiques, Universite de Lille.
4. Jeff Suzuki. *A Brief History of Impossibility.* Mathematics Magazin, Vol 81. 2008.
5. Encyclopedia.com

Và nhiều tài liệu, hình ảnh khác lấy trên Internet.

California cuối Thu năm 2017.

© 2017 *lequanganh.*