Tìm hiểu về

HÀM SỐ ZETA và GIẢ THUYẾT RIEMANN

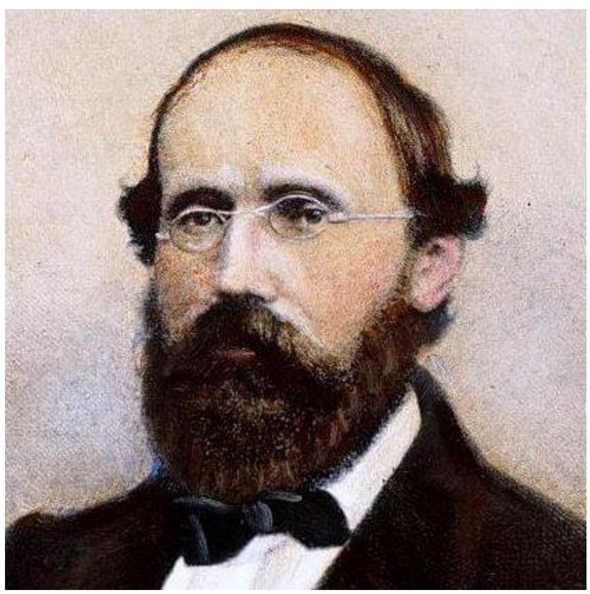
(*The Riemann Hypothesis*)

Lê Quang Ánh, Ph.D.

Những zeros không tầm thường của hàm số ζ(s) đều có phần thực nằm trên đường thẳng Re(s) = $\frac{1}{2}$.

Nếu tôi chợt thức dậy sau một giấc ngủ một ngàn năm thì câu hỏi đầu tiên của tôi sẽ là: Giả thuyết Riemann đã được chứng minh chưa[1]*?*

David Hilbert



Bernhard Riemann (1826 – 1866).

[1] Lorenzo Mencini. *Zeros of the Riemann zeta function on the critical line.* Universita degli Studi ROMA TRE.

Giả thuyết Riemann là một trong 7 bài toán Thiên Niên Kỷ (Seven millenium problems). Cho tới nay chỉ mới có một bài được giải đúng, đó là bài *Giả thuyết Poincaré* (hay là *Dự đoán Poincaré*). Viện Toán học Clay treo giải thưởng 1 triệu đô la Mỹ cho bất cứ ai giải được bất cứ bài nào trong 7 bài toán đó[2].

Mới đây một số tờ báo (không chuyên) đã đưa một cái tin không khác gì bom nổ trong giới Toán học:

- **Một nhà Toán học hàng đầu nói rằng đã giải được bài toán quan trọng nhất đã có từ 160 năm** (Insider, September 24, 2018).
- **Có phải đã có thêm một bài toán 1 triệu đô nữa đã được giải rồi chăng?** (USA Today, September 24, 2018).
- **Sir Michael Atiyah tuyên bố rằng ông đã chứng minh được bài toán *GIẢ THUYẾT RIEMANN*** (The Aperiodical, September 24, 2018).

Sau đó một vài tờ báo tiếng Việt khác dịch lại hoặc viết theo, lại còn thêm "mắm thêm muối" vào tin ấy, làm cho một số người trong cộng đồng Toán học giật mình. Có thật vậy không?

Ta nhớ lại rằng trong hơn 300 năm có rất nhiều nhà Toán học tuyên bố rằng mình đã chứng minh được *Định lý cuối cùng của Fermat*, nhưng thật ra họ đã đưa ra lời giải sai hoặc chỉ đúng trong một vài trường hợp riêng. Cho tới những năm 1994 -1995 nhà Toán học xuất sắc Andrew Wiles công bố một chứng minh vô cùng phức tạp và được sửa tới sửa lui vài lần lời giải mới được các tổ chức Toán học Thế Giới công nhận là đúng.

Tình hình diễn ra tương tự như vậy cho bài toán *Dự đoán Poincaré.* Trong hơn 100 năm người ta cũng đã công bố nhiều lời giải nhưng chưa có lời giải nào đúng cả. Phải đợi cho đến những năm 2003-2005, với nhà Toán học "kì lạ" Grigori Perelman, người ta mới có được lời giải chính xác cho bài toán Poincaré[3].

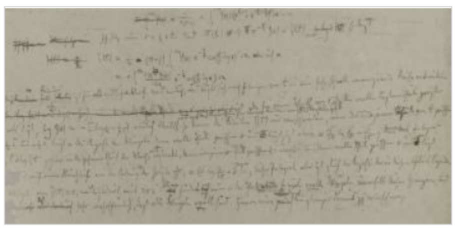
[2] Bảy bài toán Thiên Niên Kỷ là:

1. P versus NP
2. The Hodge conjecture
3. **The Poincaré conjecture** (**solved**)
4. The Riemann hypothesis
5. Yang–Mills existence and mass gap
6. Navier–Stokes existence and smoothness
7. The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture.

[3] Về hai bài toán này xin tìm đọc *Định Lý Cuối Cùng Của Fermat* (NXB TH Thành phố) và *Perelman và Dự đoán Poincaré* trong trang rosetta.vn/lequanganh của cùng tác giả Lê Quang Ánh.

Mặc dù Sir Michael Atiyah là một nhà Toán học xuất sắc (Fields Medal 1966, Abel Prize 2004) nhưng cái mà ông ta nói là ông có *một chứng minh đơn giản* (*a simple proof*) cho bài toán *Giả thuyết Riemann* thì cái chứng minh ấy vẫn chưa được các tổ chức Toán học chính thống của thế giới công nhận. Hơn nữa, ngay trong trang web chính thức mới nhất (ngày 24 tháng 10 năm 2018) của Viện Toán học Clay – tổ chức bảo trợ giải thưởng các bài toán Thiên Niên Kỷ - ở cuối mục Riemann Hypothesis vẫn còn ghi là **This problem is unsolved** (bài toán này chưa được giải) như hình chụp sau đây:

Riemann Hypothesis



Some numbers have the special property that they cannot be expressed as the product of two smaller numbers, e.g., 2, 3, 5, 7, etc. Such numbers are called *prime* numbers, and they play an important role, both in pure mathematics and its applications. The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern. However, the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + ...$

called the *Riemann Zeta function*. The Riemann hypothesis asserts that all *interesting* solutions of the equation

$\zeta(s) = 0$

lie on a certain vertical straight line.

This has been checked for the first 10,000,000,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

This problem is: Unsolved

Trang chính thức nói về Giả thuyết Riemann, bên góc trái trên cùng là chữ viết tay của Riemann về vấn đề này (http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis).

Trong bài viết này chúng tôi sẽ đưa độc giả không chuyên[4] đi **tìm ý nghĩa** của hàm số zeta và *Giả Thuyết Riemann*, và sự liên hệ với số nguyên tố như thế nào. Chúng tôi sẽ bắt đầu từ chỗ đơn giản nhất để độc giả có thể theo được nội dung của vấn đề. Ước mong là phần trình bày của chúng tôi sẽ giúp ích phần nào cho các độc giả ưa thích Toán, nhất là các sinh viên chuyên ngành Toán, hiểu được một bài toán được cho là quan trọng nhất trong 7 bài toán Thiên Niên kỷ[5].

[4] Chỉ cần kiến thức Toán Cao cấp (một, hai năm ĐH).

[5] Theo ý kiến của Stephen Smale (Fields Medal 1966).

1. Số nguyên tố

- **Số nguyên tố và hợp số**

  Số nguyên tố là số nguyên chỉ chia hết cho số 1 và chính nó.

  Số 1 có phải là số nguyên tố không? Theo trên thì số 1 thỏa định nghĩa, như vậy nó là số nguyên tố. Nhưng do nó quá tầm thường (trivial) cho nên người ta thường không kể nó là số nguyên tố. Theo chỗ chúng tôi biết, trong Lịch sử Toán học chỉ có một người coi số 1 là số nguyên tố, đó là "cha đẻ" của *Lý thuyết độ đo,* nhà Toán học Henri Lebesgue (1875 - 1941)[6].

  Một số các số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. ….Chúng ta chú ý rằng chỉ có số 2 là số nguyên tố chẵn mà thôi.

  Bây giờ ta coi số 28. Những số nào chia hết 28 (hay là 28 chia hết *cho* những số nào)? Câu trả lời dễ thấy là 1, 2, 4, 7, 14, và 28. Người ta nói chúng là những thừa số (factors) của 28, nhưng 2, 4, 7, và 14 là những *thừa số thực sự* (*proper factors*) của 28, và 28 là một *hợp số.*

  Như vậy các số nguyên được chia thành hai loại: số nguyên tố và hợp số (số không nguyên tố). Ta có thể coi số nguyên tố là những yếu tố cơ bản để tạo thành tập hợp số nguyên (như những viên gạch - building blocks - để xây tường).

- **Có bao nhiêu số nguyên tố?**

  Euclid (khoảng 300 trước Tây lịch) đã trả lời câu hỏi này rồi:

  Định lý (Euclid):

  $$\boxed{\text{Có vô số số nguyên tố.}}$$

  <u>*Chứng minh*</u>:

  Giả sử ban đầu: *tập hợp số nguyên tố là không vô hạn (tức là hữu hạn).* Nếu vậy ta có thể liệt kê **tất cả** các số nguyên tố. Gọi P là tích số của tất cả các số nguyên tố nói trên. Đặt $Q = P + 1$. Chỉ có 2 trường hợp sau đây xảy ra:

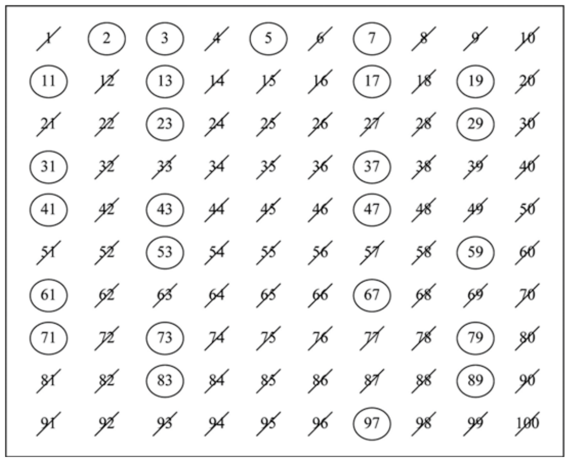
  <u>Trường hợp 1</u>: Q là số nguyên tố. Như vậy là đã tìm ra được một số nguyên tố không có trong bản liệt kê nói trên: mâu thuẩn.

  <u>Trường hợp 2</u>: Q không phải là số nguyên tố (hợp số). Gọi p là một thừa số nguyên tố của Q. Vì p có trong danh sách liệt kê nói trên nên p cũng là thừa số của P. Do Q và P chia hết cho p nên $Q – P = 1$ chia hết cho p. Điều này vô lý bởi vì 1 không chia hết cho số nguyên tố nào cả.

  Như vậy giả sử ban đầu là không đúng. Nói cách khác, tập hợp các số nguyên tố là vô hạn. ■

[6] John Derbyshire. *Prime Obsession*. p.33.

Eratosthenes, một nhà Toán học Hy Lạp, sống vào khoảng 250 năm trước Tây lịch (sau Euclid vài chục năm), đã đưa ra một thuật toán để tìm ra tất cả các số nguyên tố cho tới một số nào đó. Thuật toán này được gọi là cái sàng Eratosthenes (sieve). Thí dụ như muốn tìm tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 100, ta đặt tất các các số nguyên từ 1 cho tới 100 vào trong một bảng vuông. Sau đó gạch bỏ số 1, gạch bỏ tất cả các bội số của 2, rồi tất cả các bội số của số 3, của số 5, của số 7, của số 11,…vân vân. Những số còn lại trong bảng là những số nguyên tố nhỏ hơn 100.



Những số được vòng lại là những số nguyên tố nhỏ hơn 100.

- **Sự phân bố các số nguyên tố như thế nào?**

Nếu *p* là một số nguyên tố thì *số nguyên tố kế tiếp số p là số gì, làm sao xác định*? Đây là mối bận tâm của các nhà Toán học từ thời Euclid cho đến nay. Và câu hỏi kế tiếp cũng làm cho các nhà Toán học bối rối không kém, đó là *các số nguyên tố phân bố như thế nào trên đường thẳng số*?

Dưới đây là tất cả những số nguyên tố nhỏ hơn 1000.

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Có tất cả là 168 số. Nếu ta nhìn gần hơn một chút nữa ta sẽ thấy: Từ số 1 đến số 100 có 25 số nguyên tố, từ 401 đến 500 có 17 số nguyên tố, từ 901 đến 1000 có 14 số nguyên tố. Hình như số các số nguyên tố ít dần đi (thưa). Liệu có một quy luật nào diễn tả điều này không? Có bao nhiêu số nguyên tố nhỏ hơn một số cho sẵn? Đó là những thắc mắc đã có từ thời Gauss, Riemann cho đến nay.

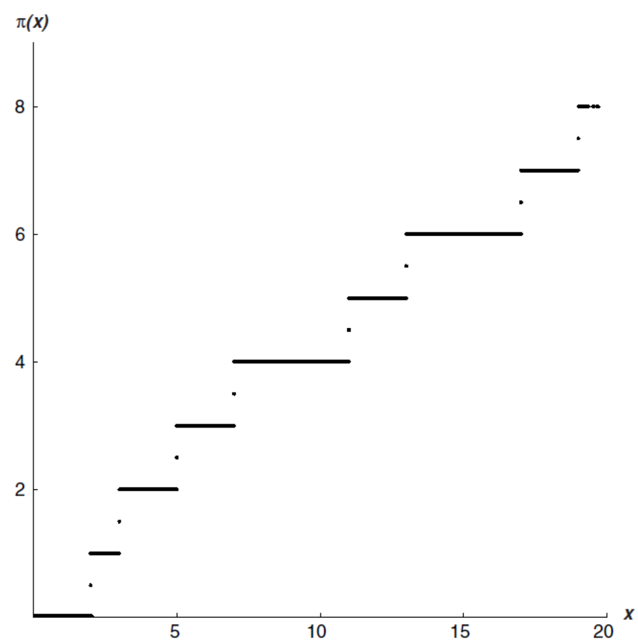
- **Hàm số đếm số nguyên tố (Prime counting function)**

Chúng ta chưa biết cách phân bố các số nguyên tố như thế nào trên đường thẳng số nhưng sẽ rất hữu ích nếu chúng ta biết số lượng các số nguyên tố nhỏ hơn một số cho sẵn. Gauss giới thiệu hàm số $\pi(x)$[7] gọi là *hàm số đếm số nguyên tố nhỏ hơn một số thực $x > 0$*.

Thí dụ:

$\pi(1) = 0$, có nghĩa là có 0 số nguyên tố khi $x < 1$.
$\pi(2) = 0$, có nghĩa là có 0 số nguyên tố khi $x < 2$.
$\pi(3) = 1$, có nghĩa là có 1 số nguyên tố khi $x < 3$, đó là số 2.
$\pi(4) = 2$, có nghĩa là có 2 số nguyên tố khi $x < 4$, đó là các số 2, 3.
$\pi(5) = 2$, có nghĩa là có 2 số nguyên tố khi $x < 5$, đó là các số 2, 3.
$\pi(6) = 3$, có nghĩa là có 3 số nguyên tố khi $x < 6$, đó là các số 2, 3, 5.
$\pi(7) = 3$, có nghĩa là có 3 số nguyên tố khi $x < 7$, đó là số 2, 3, 5.
Cứ thế tiếp tục.

Đồ thị hàm số $\pi(x)$ với x < 20.



[7] Chữ π dùng ở đây không liên quan gì với giá trị $\pi \approx 3.14159$…cả. Nó được dùng để chỉ hàm số như chữ *f, g, h*…

- **Định lý số nguyên tố (PNT = The Prime Number Theorem)**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.}$$

Định lý được ông Hoàng của Toán học Carl Gauss (1777 – 1855) phát biểu vào năm 1792 (15 tuổi) và vài năm sau, năm 1797, được nhà Toán học người Pháp Adrien-Marie Legendre (1752 – 1873) phát biểu một cách độc lập.
Định lý được chứng minh vào năm 1896 (100 năm sau) bởi hai nhà Toán học Jacques Hadamard (1865 - 1963) người Pháp và Charles Jean de la Vallée Poussin (1866 - 1962) người Bỉ, một cách độc lập nhau.
Thay đổi cách viết, ta có công thức cho phép ước tính số các số nguyên tố nhỏ hơn một số *x,* khi số *x* khá lớn:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{ln\, x}\,.$$

Ta cũng có thể viết:

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{ln\, x}.$$

Điều này nói rằng, với số *x* khá lớn, xác suất để số *x* là số nguyên tố là $\frac{1}{ln\, x}$.

2. Hàm số zeta Riemann

- **Chuỗi số điều hòa**

$$H_r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Chuỗi số này đã được Nicholas Oresme[8] (1320 – 1382) nghiên cứu từ thế kỷ 14. Oresme cũng đã chứng minh được chuỗi số này có tổng bằng vô cực (phân kỳ).

- **Bài toán Basel**

Tìm tổng số vô hạn (chuỗi số vô hạn):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

[8] Hay là Nicole Oresme, Nicolas Oresme, cách viết thay đổi chút ít tùy theo ngôn ngữ.

Bài toán này được nhà Toán học người Ý tên là Pietro Mengoli (1626 – 1686), giáo sư trường Đại học Bologna, đặt ra từ năm 1650. Đáng lý ra bài toán phải được gọi tên là *Bài Toán Bologna*, nhưng vì do Jakob Bernoulli (1654 – 1705), nhà Toán học quê ở Basel (Thụy Sĩ) là người đầu tiên đưa nó ra cho cộng đồng Toán học Châu Âu nghiên cứu tìm giải đáp, cho nên bài toán mang tên là *Bài Toán Basel.*

Nhà Toán học thiên tài và đa tài Bernhard Euler (1707 – 1783)[9] – cũng quê ở Basel – là người đầu tiên tìm ra lời giải. Đáp số là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \cdot$$

Nhưng Euler không dừng lại ở đó. Ông còn tìm được:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945} \cdot$$

Hơn thế nữa, Euler còn đưa ra phương pháp để tính được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^N}$ với *N* là số chẵn.

Thế còn với *N* là số lẻ thì sao? Không những Euler không nói gì mà suốt hơn 200 năm sau cũng không thấy ai nói gì. Cho tới năm 1978, một nhà Toán học người Pháp tên là Roger Apéry (1916 – 1994) mới chứng minh được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots \text{ là số vô tỷ,}$$

khi ấy Apéry đã 61 tuổi. Thời ấy, đây là một cái tuổi quá già để có thể phát minh ra điều mới trong Khoa học[10].

Nhưng cũng thời ấy người ta đã biết rằng chuỗi vô tận

---

[9] Euler là học trò của Johann Bernoulli (1667 - 1748), một người em của Jakob Bernoulli (xem thêm bài viết về gia đình Bernoulli trong Rosetta.vn/lequanganh).

[10] Ngày nay, Michael Atiyah (1929 -) đã gần 90 tuổi mà vẫn còn hăm hở tấn công vào *Giả thuyết Riemann*. Cũng nhân đây, xin nói vài nét về nhà Toán học Roger Apéry. Ông vào trường Cao đẳng Sư Phạm Cao cấp (ENS) Paris năm 1935. Chưa tốt nghiệp, ông phải "xếp bút nghiên theo việc đao cung" khi Thế chiến thứ hai bùng nổ. Năm 1941, ông bị thương ngoài chiến trường và bị bắt làm tù binh. Thế chiến kết thúc, ông về học tiếp. Năm 1947 ông làm Tiến sĩ với giáo sư Paul Dubreil và René Garnier. Ông có nhiều đóng góp cho Giải tích, trong đó tên ông được ghi lại cho chứng minh ζ(3) là số vô tỷ. (Độc giả thế hệ sinh viên ĐH 1960 -1970 còn nhớ Ông Bà Dubreil là đồng tác giả cuốn sách nổi tiếng *Leçons d'Algèbre Moderne* do nhà Dunod xuất bản năm 1963. Trước đó vài năm (năm 1961) có một cuốn sách cùng tên, tác giả là André Lentin và Jacques Rivaud, do nhà Vuibert xuất bản).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

hội tụ với những giá trị s > 1. Giới hạn (hữu hạn) được ký hiệu là ζ(s) – hàm số zeta - và ta có:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots. \quad \text{(với mọi số thực } s > 1\text{)}.$$

- **Công thức tích số Euler**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdots.$$

(s là số thực lớn hơn 1, p là tất cả những số nguyên tố).

Công thức xuất hiện lần đầu tiên vào năm 1737 trong một bài báo của Euler mang tựa đề *Variae observationes circa series infinitas* (*Những quan sát về chuỗi số vô tận*). Công thức này là nền tảng hiện đại cho Lý thuyết số để nghiên cứu về số nguyên tố. Chứng minh của nó cũng không khó khăn mấy như độc giả sẽ thấy dưới đây.

Chứng minh:

Bắt đầu bằng hàm số zeta:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (1)$$

Nhân hai vế cho $\frac{1}{2^s}$ ta có:

$$\frac{1}{2^s} \times \zeta(s) = = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} \cdots \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2):

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots \quad (3)$$

Nhân hai vế của (3) cho $\frac{1}{3^s}$ rồi lấy kết quả trừ cho (3) ta được:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

Lặp lại phương cách này cho đến vô cùng, ta được:

$$\cdots\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1.$$

Từ đó ta lấy ra được:

$$\zeta(s) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\right) \times \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1-2^{-s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-3^{-s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-5^{-s}}\right) \times \left(\frac{1}{1-7^{-s}}\right) \times \cdots \blacksquare$$

- **Hàm số zeta**

Xin tạm dừng ở đây một chút rồi ta sẽ trở lại hàm số zeta sau. Xét chuỗi số vô tận:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$$

Ta biết rằng với $|x| < 1$ chuỗi số hội tụ về $\frac{1}{1-x}$, nghĩa là ta có thể viết:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots \text{ với } |x| < 1.$$

Nhưng nếu xét riêng hàm số $S(x) = \frac{1}{1-x}$ thì hàm số này được xác định khắp mọi nơi trừ tại điểm x = 1. Người ta nói đã mở rộng $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$ (chỉ xác định khi $|x| < 1$) thành hàm số $S(x) = \frac{1}{1-x}$ xác định khắp mọi nơi trừ tại điểm x = 1.

Bây giờ xin trở lại hàm số zeta:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^5} + \ldots.$$

Như đã nói, hàm số chỉ xác định với biến số thực *s > 1*. Liệu ta có thể mở rộng hàm số này như cách làm trong đoạn nói trên được không? Thí dụ như ta muốn tính $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ có được không? Làm sao tính?

Xin trả lời ngay: có thể được. Hãy xét hàm số η (đọc là eta)[11] sau đây:

$$\eta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^5} - \ldots\ldots$$

Người ta có thể chứng minh chuỗi số này hội tụ khi *s > 0* nhưng ta không làm điều đó ở đây. Điều ta muốn làm là đi tìm hệ thức giữa hàm số này và hàm số zeta. Ta có thể viết:

$$\eta(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots.\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} \ldots.\right)$$

$$= \zeta(s) - 2 \times \frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots.\right)$$

$$= \zeta(s) - \frac{1}{2^{s-1}} \cdot \zeta(s)$$

$$= \zeta(s) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right).$$

Từ đó lấy ra được:

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)}$$

[11] η là mẫu tự thứ bảy, còn ζ là mẫu tự thứ sáu trong tiếng Hy Lạp.

Nhờ máy tính, sau khi tính trên 100 số hạng, ta được $\eta\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.55502369$, do đó ta có $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx$ *- 1.460354508.* [12] Như vậy là ta đã mở rộng hàm số zeta cho mọi số thực *s > 0.*
Còn khi s < 0 thì sao? Không thể tính được *η(s)* vì chuỗi số không hội tụ.

Năm 1859, Riemann được bầu vào Hàn Lâm Viện Khoa học Berlin. Như thông lệ, thành viên mới phải trình cho Hàn Lâm Viện công trình nghiên cứu mới nhất của mình. Và Riemann đã giới thiệu công trình về Lý thuyết số - bài duy nhất thuộc lãnh vực này của Riemann – mang tựa đề *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Về số những số nguyên tố nhỏ hơn một giá trị cho sẵn*). Đây là một tuyệt tác của Riemann, chỉ dài chưa tới 10 trang nhưng nó đã làm thay đổi một cách có ý nghĩa hướng nghiên cứu Toán học thời kỳ tiếp sau đó và ảnh hưởng của nó vẫn còn cho tới ngày nay. Nó như một cơn sóng đập vào nhiều ngành của Toán học thuần lý (pure mathematics), thúc đẩy chúng phát triển.

Dựa trên công thức tích số Euler đã giới thiệu ở đoạn trên, Riemann đã hoàn chỉnh mở rộng hoàn toàn cho hàm số zeta với biến số thực. Riemann đã thiết lập được phương trình sau đây, gọi là *phương trình hàm cho zeta:*

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)}$$

Qua phương trình ta thấy khi thay *s* bởi *1 – s* thì phương trình không đổi, nghĩa là *ζ(s) = ζ(1-s).*
Điều này cho phép tính được *ζ(s)* khi *s < 0*. Thí dụ như ta muốn tính *ζ(-15),* ta chỉ cần tính *ζ(16)* vì

$$\zeta(16) = \zeta(1 - 16) = \zeta(-15).$$

Tóm lại, hàm số zeta đã được mở rộng cho mọi giá trị thực của $s \neq 1$.

- **Hàm số zeta mở rộng cho biến số phức**

Thế còn với biến số phức? Ta trở lại với công thức tích số Euler:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Xem trường hợp *s = σ + it* là số phức. Ta chứng minh được rằng chuỗi vô tận $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ đều khi *Re(s) = σ > 1*. Như vậy ta có thể mở rộng hàm số zeta trong nửa mặt phẳng phức *Re(s) = σ > 1.*

---

[12] Số liệu lấy từ J.Derbyshire. *Prime Obsession*, p.146.

Trong phần *Re(s) = σ > 0* của mặt phẳng phức, Riemann đã thiết lập được công thức cho hàm số *ζ(s)* bằng *sự liên tục giải tích* (*analytic continuation*) để hàm số này hội tụ tuyệt đối:

(II)
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx$$

trong đó *{x} = x - ⌊x⌋*. Hàm số này *giải tích khắp mọi nơi* (*analytic everywhere*) trong nửa mặt phẳng *Re(s) = σ > 0* trừ tại *s = 1* (*điểm cực đơn = simple pole*). Riemann chưa dừng lại ở đây. Ông muốn mở rộng hàm số zeta để cho nó giải tích khắp mọi nơi (hàm nguyên = entire function) thông qua *hàm số gamma*. Và Riemann đã thiết lập được công thức sau đây:

(III)
$$\zeta(s) \;=\; \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left\{-\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty \left[x^{\frac{s}{2}-1} \;+\; x^{-\frac{s+1}{2}}\right]\psi(x)dx\right\}$$

Trong công thức này *ψ(x)* giảm nhanh hơn bất cứ hàm mũ nào của *x* và do đó tích phân hội tụ với mọi giá trị của *s*, trừ hai điểm kì dị *s = 0* và *s = 1*. Riemann còn muốn đi xa hơn nữa bằng cách định nghĩa hàm số *ξ*(s) không còn điểm kì dị nào:

(IV)
$$\xi(\mathrm{s}) = \frac{s}{2}\,(\mathrm{s}-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\;\zeta(s)$$

3. Zeros của hàm số zeta Riemann: Giả thuyết Riemann

Zeros của hàm số zeta Riemann, tức là nghiệm của phương trình *ζ(s) = 0*, được chia thành hai loại: zeros tầm thường (trivial zeros) và zeros không tầm thường (non-trivial zeros).

- **Zeros tầm thường của hàm số zeta Riemann**

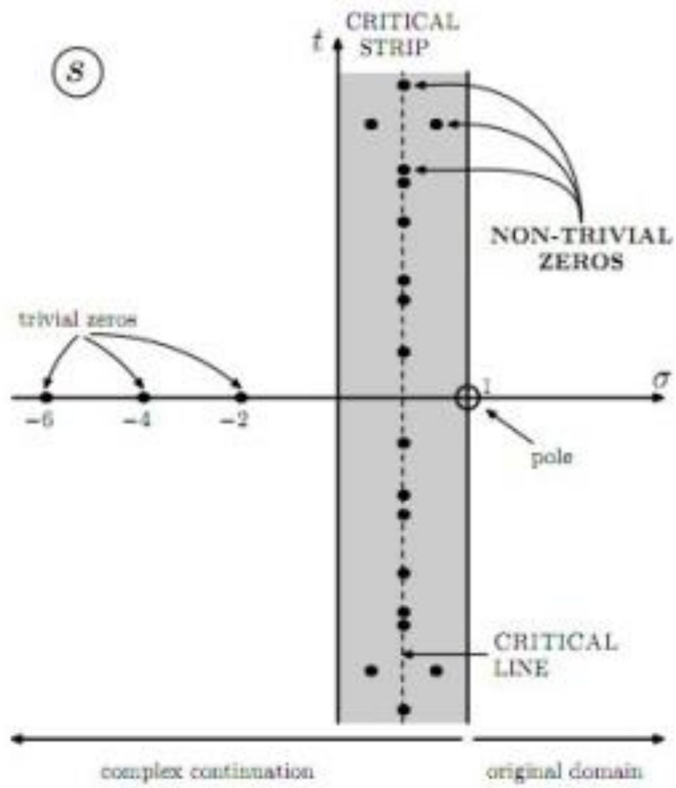
Những zeros tầm thường của hàm số zeta là những zeros nào nằm ngoài dải quan trọng 0 < Re(s) < 1 (critical strip). Rõ ràng là về phía Re(s) > 1 hàm số zeta không thể triệt tiêu, chỉ còn có thể có zeros về phía Re(s) < 0. Vì hàm số *gamma* không triệt tiêu trên mặt phẳng phức, cho nên phương trình hàm (I) cho:

$$\sin\frac{\pi s}{2} = 0.$$

Từ đó s = -2, -4, -6, …. Đó là những zeros tầm thường của hàm số zeta.

- **Zeros không tầm thường của hàm số zeta Riemann**

Tất cả những zeros còn lại của hàm số zeta đều nằm trong dải 0 < Re(s) < 1. Chúng được gọi là những zeros không tầm thường.
Trong bài viết nổi tiếng công bố năm 1859, Riemann phát biểu rằng:
Trong dải 0 < Re(s) < 1 của mặt phẳng phức, hàm số ζ(s) có vô số zeros, tức là phương trình ζ(s) = 0 có vô số nghiệm, tất cả đều có phần thực bằng $\frac{1}{2}$.
Phát biểu này được gọi là *Giả thuyết Rieman.*



- **Kiểm chứng**

Theo trang *The Prime Pages*[13] chuyên về nghiên cứu, ghi nhận, và lưu trữ dữ liệu về số nguyên tố, thì cho tới năm 1986, người ta đã kiểm chứng được 1.5 tỉ zeros không tầm thường của hàm số zeta trong dải 0 < Re(s) < 1, tất cả đều *có phần thực bằng* $\frac{1}{2}$. Giữa những năm 2001 và 2005, Sebastian Wedeniwsk, một kỹ sư nổi tiếng của hãng IBM, tuyên bố rằng ông ta đã kiểm chứng trên 100 tỉ zeros không tầm thường của hàm số zeta và thấy tất cả đều *có phần thực bằng* $\frac{1}{2}$.
Những kết quả trên chưa đủ để nói rằng giả thuyết Rieman là đúng hoặc đã được chứng minh. Những kiểm chứng ấy là bằng chứng để ta có thêm dữ

[13] https://primes.utm.edu/references/refs.cgi/VTW86

kiện để tin là giả thuyết Riemann đúng. Và chúng ta vẫn chờ một ngày nào đó sẽ xuất hiện một chứng minh thực sự có tính thuyết phục các nhà Toán học và các tổ chức Toán học uy tín trên thế giới hiện nay.
Tuy nhiên, suốt từ khi Riemann phát biểu đến nay cũng đã có nhiều nhà Toán học tìm cách bác bỏ giả thuyết ấy, nhưng cho tới nay vẫn chưa có ai thành công.

4. Hàm số zeta Riemann và số nguyên tố

Nhắc lại, Gauss đã giới thiệu hàm số đếm số nguyên tố *π(x)* và thông qua *Định lý số nguyên tố* (PNT), *π(x)* cho phép ước tính được số các số nguyên tố nhỏ hơn một giá trị thực *x*.
Trong bài viết của mình, Riemann thiết lập hàm số đếm số nguyên tố riêng của mình qua công thức sau đây (gọi là *Hàm số đếm số nguyên tố Riemann*):

(V)
$$\boxed{J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \frac{1}{5}\pi(\sqrt[5]{x}) + \ldots}$$

Chúng ta nên lưu ý rằng tổng số xác định hàm số đếm số nguyên tố Riemann trong công thức (V) không phải là tổng số vô cùng. Đến một số hạng nào đó tổng số ấy sẽ phải dừng lại vì không có số nguyên tố nào nhỏ hơn 2. Thí dụ như ta muốn tính *J(100)*. Tổng số trên sẽ dừng lại ở số hạng thứ 8, bởi vì

$$\sqrt[8]{100} \approx 1.778279\ldots < 2$$

cho nên $\pi\left(\sqrt[8]{100}\right) = 0$.

Kết quả là

$$J(100) \approx 28.5333\ldots$$

Trong khi thực tế là có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Riemann tìm cách làm cho công thức đếm số nguyên tố tốt hơn. Ông đã thiết lập được công thức:

$$\pi(x) = \sum_n \mu(n)\ \frac{J(\sqrt[n]{x})}{n}.$$

Cũng như trên, $J\left(\sqrt[n]{x}\right)$ cũng sẽ dừng ở một giá trị nào đó của *n*. Trong công thức trên $\mu(n)$ là hàm số Möbius xác định như sau:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \text{khi} \begin{cases} \text{n không chính phương với số chẵn thừa số nguyên tố.} \\ \text{n không chính phương với số lẻ thừa số nguyên tố.} \\ n \text{ có một thừa số chính phương.} \end{cases}$$

Nhờ vào hàm số Möbius ta có công thức sau:

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}J(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}J(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}J(x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{7}J(x^{\frac{1}{7}}) + \frac{1}{10}J(x^{\frac{1}{10}}) - \ldots$$

Bây giờ thử tính lại số các số nguyên tố nhỏ hơn 100, ta thấy kết quả chính xác hơn:

$$\pi(100) = J(100) - \frac{1}{2}J(10) - \frac{1}{3}J(4.64\ldots) - \frac{1}{5}J(2.51\ldots) + \frac{1}{6}J(2.51\ldots) - 0 - 0 \ldots$$

$$\pi(100) = 28.533\ldots - \left(\frac{1}{2} \times 5.33 \ldots\right) - \left(\frac{1}{3} \times 2.5\right) - \left(\frac{1}{5} \times 1\right) + \left(\frac{1}{6} \times 1\right) = 25 .$$

Ngoài ra, từ công thức tích số Euler, Riemann còn thiết lập được công thức đếm số nguyên tố với dạng tường minh sau đây:

$$\text{(VI)} \quad \boxed{J(x) = Li(x) - \sum_{\rho}^{\infty} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t}\, dt}$$

Trong đó hàm tích phân được định như sau:

$$Li(x) = \int_{2}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

và tổng "sigma" lấy trên tất cả các zeros không tầm thường của hàm số zeta Riemann.

Dùng công thức đã được Riemann điều chỉnh như trên người ta có thể ước tính số các số nguyên tố nhỏ hơn một số thực *x* một cách tốt nhất (theo Von Koch).

******

Từ khi Riemann qua đời vào năm 1866 (chưa tròn 40 tuổi) cho tới nay, bài nghiên cứu duy nhất về Lý thuyết số của ông vẫn còn là một sáng tạo đột phá trong lãnh vực Lý thuyết số. Giả thuyết ông nêu ra về zeros của hàm zeta, sau hơn 150 năm, vẫn chưa chứng minh được mặc dù có rất nhiều nhà Toán học nổi tiếng đã bỏ nhiều thời gian và công sức vào đó. Tuy nhiên, cũng nhờ bài nghiên cứu đó của Riemann mà hằng năm có rất nhiều công trình nghiên cứu mới trong nhiều lãnh vực có liên quan đến số nguyên tố và Lý thuyết số được công bố.

Người ta vẫn hy vọng và chờ đợi một ngày không xa một chứng minh đúng đắn cho giả thuyết Riemann sẽ xuất hiện và được các định chế Toán học thế giới công nhận.

Tài liệu tham khảo

1. Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag. 1976.
2. John Derbyshire. *Prime Obsession*. Author. 2004.
3. H.M. Edwards. *Riemann Zeta function*. Dover Publications Inc. 1974.
4. S.J. Patterson. *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta Function*. Cambridge University Press. 1995.
5. https://medium.com/cantors-paradise/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f
6. https://primes.utm.edu/references/refs.cgi/VTW86
7. https://www.claymath.org/sites/default/files/official_problem_description.pdf

Và nhiều tài liệu hình ảnh khác trên Internet.

California cuối Thu 2018.